

YARI İLETKEN NANO YAPILARDA YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

YAZAR

PROF. DR. ARİF BABANLI

EDİTOR

ÖĞR. GÖR. DR. MUSTAFA BALCI
VEPA SABYROV

EĞİTİM
yayınevi

YARI İLETKEN NANO YAPILARDA YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Yazar: Prof. Dr. Arif Babanlı

Yayınevi Grubu Genel Başkanı: Yusuf Ziya Aydoğan (yza@egitimyayinevi.com)

Genel Yayın Yönetmeni: Yusuf Yavuz (yusufyavuz@egitimyayinevi.com)

Sayfa Tasarımı: Kübra Konca Nam

Kapak Tasarımı: Eğitim Yayınevi Tasarım Birimi

T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı

Yayıncı Sertifika No: 76780

E-ISBN: 978-625-385-587-1

1. Baskı, Aralık 2025

Kütüphane Kimlik Kartı

YARI İLETKEN NANO YAPILARDA YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Yazar: Prof. Dr. Arif Babanlı

VIII+112 s., 160x240 mm

Kaynakça var, dizin yok.

E-ISBN: 978-625-385-587-1

Copyright © Bu kitabın Türkiye'deki her türlü yayın hakkı Eğitim Yayınevi'ne aittir. Bütün hakları saklıdır. Kitabın tamamı veya bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre kitabı yayımlayan firmanın ve yazarlarının önceden izni olmadan elektronik/mekanik yolla, fotokopi yoluyla ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

EĞİTİM
yayınevi

Yayınevi Türkiye Ofis: İstanbul: Eğitim Yayınevi Tic. Ltd. Şti., Atakent mah. Yasemen sok. No: 4/B, Ümraniye, İstanbul, Türkiye

Konya: Eğitim Yayınevi Tic. Ltd. Şti., Fevzi Çakmak Mah. 10721 Sok. B Blok, No: 16/B, Safakent, Karatay, Konya, Türkiye
+90 332 351 92 85, +90 533 151 50 42
bilgi@egitimyayinevi.com

Yayınevi Amerika Ofis: New York: Egitim Publishing Group, Inc.
P.O. Box 768/Armonk, New York, 10504-0768, United States of America
americaooffice@egitimyayinevi.com

Lojistik ve Sevkiyat Merkezi: Kitapmatik Lojistik ve Sevkiyat Merkezi, Fevzi Çakmak Mah. 10721 Sok. B Blok, No: 16/B, Safakent, Karatay, Konya, Türkiye
sevkiyat@egitimyayinevi.com

Kitabevi Şubesi: Eğitim Kitabevi, Şükran mah. Rampalı 121, Meram, Konya, Türkiye
+90 332 499 90 00
bilgi@egitimkitabevi.com

İnternet Satış: www.kitapmatik.com.tr
bilgi@kitapmatik.com.tr

EĞİTİM YAYINEVİ
GRUBU

EĞİTİM
yayınevi

SALON
yayıncıları

Kitapmatik
yayıncıları

kitapmatik
İnternetdeki Mağazanız

EĞİTİM
kitabevi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Şekiller dizini	iv
Simgeler ve Kısaltmalar dizini.....	vi
Ön söz.....	viii
1. Giriş	1
2. Nanoyapılar Hakkında Kısa Bilgi	5
3. Dönme Grubuna Göre Değişmez Kalan Diferansiyel Denklemler Sistemi	19
4. Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları ve Dalga Fonksiyonları	29
5. Küresel Kuantum Noktalarında Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	45
6. Kane Tipi Yarı İletken Kuantum Tellerinde Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	57
7. Manyetik Alan Olmayan Durumda Kuantum Tellerinde Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	65
8. Manyetik Alan Varlığında Kane Tipi Kuantum Tellerinde Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	69
9. Kane Tipi Yarı İletkenlerden Yapılmış Nano Kalınlıktaki İçi Boş Kuantum Silindirlerinde Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	79
10. Harici Manyetik Alan Varlığında Nano Kalınlığa Sahip Kane Tipi Yarı İletkenlerden Yapılmış İçi Boş Kuantum Silindirlerinde Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	87
11. Kane Tipi Yarı İletken Kuantum Anti-Tellerinde Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	95
12. Harici Homojen Manyetik Alan Varlığında Kane Tipi Yarı İletken Kuantum Anti-Tellerinde Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları	101
Kaynaklar	109

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Nanoyapılarda durum yoğunluklarının enerjiye bağlılık grafiği.....	13
Şekil 2.2. Kane modelinde InSb tipi yarı iletkenlerin bant yapısı.....	14
Şekil 3.1. InAs (a) ve HgTe (b) tipi yarı iletkenlerin $k=0$ noktası etrafındaki bant yapısı.....	19
Şekil 5.1. (4.35) bikvadrat denkleminin çözümünün enerjiye bağımlılığı InAs (a) ve HgTe (b) için	46
Şekil 5.2. InAs kuantum noktalarında düşük enerji seviyelerinin kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı	53
Şekil 5.3. HgTe kuantum noktalarında en düşük enerji seviyelerinin kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı	54
Şekil 5.4. Değerlik bandının temel halinden iletkenlik bandına geçiş enerjilerinin kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı...	55
Şekil 7.1. InSb tipi silindirik kuantum tellerinde elektronların enerjisinin kuantum telinin yarıçapına bağlılığı	67
Şekil 7.2. Yarıçapı R olan yarı iletken kuantum teli.....	67
Şekil 8.1. GaAs silindirik kuantum tellerinde elektronların etkin g-faktörünün kuantum telinin yarıçapına bağlılığı.....	74
Şekil 8.2. InSb tipi silindirik kuantum tellerinde hafif boşlukların etkin g-faktörünün kuantum telinin yarıçapına bağlılığı	75
Şekil 8.3. InAs silindirik kuantum tellerinde spin-orbital olarak ayrılmış boşlukların etkin g-faktörünün, kuantum telinin yarıçapına bağlılığı	77
Şekil 8.4. InAs tipi kuantum tellerinde elektronların temel durum enerjisinin manyetik alana bağlılığı. $m=-2, -1, 0, 1, 2, R=30\text{nm}, l=0, k_z=0$	78
Şekil 9.1. Nano kalınlığa sahip içi boş silindir.....	80
Şekil 9.2. Parabolik durumda, düşük enerji seviyelerinin iç yarıçap R_1 'e bağlılığı. Dış yarıçap $R_2=40\text{nm}$. (l, m) kuantum sayılarının aldığı değerler: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$	84

- Şekil 9.3. Parabolik olmayan durumda, düşük enerji seviyelerinin iç yarıçap R_1 'e bağlılığı. Dış yarıçapın değeri $R_2=400 \text{ \AA}$. (l,m) değerleri: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$. 85
- Şekil 10.1. InSb tipi içi boş nano silindirlerde, $l=0$, $k_z=0$ ve $m=0$ olduğu durumda elektron enerjisinin manyetik alana bağlılığı 92
- Şekil 10.2. InSb tipi içi boş nano silindirlerde elektronların etkin g-faktörünün, iç yarıçapa bağlılığı 93
- Şekil 10.3. InSb tipi içi boş nano silindirlerde elektronların etkin g-faktörünün, manyetik alana bağlılığı 94
- Şekil 11.1. InSb tipi kuantum anti-tellerinde elektronların enerjisinin, anti-telin yarıçapına bağlılığı 98
- Şekil 12.1. $R=5\text{nm}$, $n=0$ ve $k_z=0$ olduğu durumda InSb tipi kuantum anti-tellerinde elektronların düşük enerji seviyelerinin manyetik alana bağlılığı..... 105
- Şekil 12.2. $R=30\text{nm}$, $n=0$ ve $k_z=0$ olduğu durumda InSb tipi yarı iletkenlerin kuantum anti-tellerinde elektronların düşük enerji seviyelerinin manyetik alana bağlılığı 106
- Şekil 12.3. $R=30\text{nm}$, $n=0$ ve $k_z=0$ olduğu durumda InSb tipi yarı iletkenlerin kuantum anti-tellerinde hafif boşlukların enerji seviyelerinin manyetik alana bağlılığı 107
- Şekil 12.4. InSb tipi kuantum anti-tellerinde elektronların ve hafif boşlukların etkin g-faktörlerinin R yarıçapına bağlılığı .. 108

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Vektör potansiyeli
B	Manyetik alan vektörü
$B_{S/2}(\xi)$	Brillouin fonksiyon
E	Elektrik alan vektörü
E_z	“Hızlı” alt sistemin enerji spektrumu
E	Toplam enerji spektrum
F	Kuvvet vektörü
${}_1F_1(a, b, c)$	Dejenere hypergeometrik fonksiyon
$H_1(z)$	“Hızlı” alt sistemin Hamiltonu
$H_2(\rho)$	“Yavaş” alt sistemin Hamiltonu
H_Z	Zeeman etkileşimi
H_R	Raşba spin-yörünge etkileşimi
H_{SO}	Spin-yörünge etkileşimi
H	Hamilton
H_{DMS}	Seyreltilmiş yarımmanyetik yarıiletken etkileşimi
L_0	Elipsoidin küçük yarı ekseninin uzunluğu
$L_n^m(x)$	Laguerre polinomları
R_0	Elipsoidin büyük yarı eksenin yarıçapı
$R(\rho)$	“Yavaş” alt sistemin dalga fonksiyonu
T	Sıcaklık
$U(\rho, z)$	Sınırlayıcı potansiyel
c	Işık hızı
e	Polarizasyon vektörü
e	Elektronun yükü
g	Lande faktörü
g^*	Etkin lande faktörü
g_{Mn}	Mn atomunun Lande faktörü
k	Dalga vektörü
k_B	Boltzmann sabiti
m	Manyetik kuantum sayısı
n_0	Kırılma indisi

n	“Hızlı” alt sisteminin enerji seviyelerini belirleyen kuantum sayısı
n_ρ	“Yavaş” alt sisteminin enerji seviyelerini belirleyen kuantum sayısı
\mathbf{p}	Momentum vektörü
\mathbf{p}_{if}	Momentum operatörünün matris elemanı
$u_{n_i}(\mathbf{r})$	Bloch fonksiyonu
λ	Dalga boyu
μ_0	Elektronun kütlesi
μ_B	Bohr magnetonu
$\boldsymbol{\sigma}$	Pauli matris vektörü
∇	Nabla operatörü
α_R	Raşba parametresi
\hbar	Plank sabiti
$\psi(\rho, \phi, z)$	Dalga fonksiyon
$\chi_\rho(z)$	“Hızlı” alt sistemin dalga fonksiyonu
μ	Etkin kütle
Φ	Manyetik akı
x	Mn atomunun konsantrasyonunu belirleyen parametre
Ψ	Toplam dalga fonksiyon
ω_c	Siklotron frekansı
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyon
$(x)_m$	Pochhammer fonksiyonu
$\alpha(\omega)$	Soğurma katsayısı
ω	Frekans
ε_0	Elektrik geçirgenlik sabiti
$\delta(x)$	Dirac delta fonksiyonu

ÖN SÖZ

Bu kitapta yarıiletken nano yapılarında yük taşıyıcıların dış alanların etkisinde enerji spektrumları teorik olarak incelenmektedir. Kitabın teorik bölümü büyük bir ayrıntı ve açıklıkla ele alınmıştır. Matematiksel hesaplamalar mümkün olduğunca ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Sonuçları görüntülemek için grafikler kullanılmıştır.

Spintronik, düşük sıcaklık fiziği, düşük boyutlu kuantum yapıların fiziği ve düşük boyutlu kuantum yapılarda spin-yörünge etkileşimi alanlarında çalışan araştırmacılar bu kitabı faydalı bulacaktır. Bu kitabı yazmamda bana yardımcı olan herkese şükranlarımı sunarım.

Prof. Dr. Arif BABANLI

Isparta, 2025

1.GİRİŞ

Günümüzde bilgisayar teknolojisi, işlem hızları (10^9 Hz) ve mikroçip boyutları (10^{-7} m) açısından kendi sınırlarına yaklaşmıştır. 10^{-7} m boyutu, klasik fiziğin yasalarının uygulanabileceği sınırı belirler. İşlem hızını biraz daha artırıp mikroçipin boyutunu küçültmeye çalışırsak, kendi yasaları olan yeni bir fiziksel dünyaya, nano dünyaya gireriz. Nano ölçekli dünya, boyutları 0.1nm ile 100nm arasında değişen nanoyapıların dünyasıdır. Nano dünya ile mikro dünya arasındaki temel fark, mikro dünyada bulunmayan kuantum etkilerinin burada gözlemlenmesidir. Bu nedenle, yeni nesil bilgisayar cihazlarının teknolojisi, şimdiye kadar var olan prensiplerden farklı yeni prensipler gerektirmektedir.

Bilim ve teknoloji arasındaki sıkı bağ, her ikisinin de gelişmesine neden olmuştur. Kuantum mekaniğinin ortaya çıkmasıyla, maddelerin özellikleri en küçük ayrıntısına kadar anlaşılmıştır. Bunun sonucunda, özellikleri teknolojinin gereksinimlerine uygun yeni, yapay olarak oluşturulmuş malzemeler yaratma yöntemleri genişlemiştir.

Kuantum fiziğinin fikirleri temelinde, çalışma prensibi kuantum etkilerine dayanan yeni elektronik cihazlar yaratan kuantum mühendisliği ortaya çıkmıştır. Biyoloji bilimindeki gen mühendisliğine benzer şekilde, yarı iletken elektroniğindeki kuantum mühendisliğinin başarıları, yapay olarak oluşturulmuş kuantum yapıları, kuantum noktaları, kuantum telleri ve bunlar temelinde yaratılan elektronik cihazlardır. Yapay olarak oluşturulmuş kuantum yapıları, doğada benzeri olmayan yapılardır. Yapay olarak oluşturulmuş kuantum yapılarının temelinde kuantum fiziği, kuantum mühendisliği ve yüksek teknoloji yatmaktadır. Son yıllarda bu üç alanın bağlantısı, yüksek bilimsel ve pratik öneme sahip sonuçlar vermiştir. Tünel ve atom kuvvet mikroskopları kullanılarak yüzeydeki atomları

birbirinden ayırmak ve onları istenilen şekilde dizmek mümkündür. Bu şekilde, atom ve moleküller kullanılarak tek bir molekülden oluşan transistörler ve yeni tip elektronik cihazlar yaratılmaya başlanmıştır.

Son zamanlarda, ayrık kuantum durumlarının bilgi depolama ve işleme teknolojisinde kullanılması konusu tartışılmaya başlanmıştır. Bilgi sistemi kavramı, bilginin alınmasına, işlenmesine ve iletilmesine olanak tanıyan elektronik cihazlar sistemi olarak anlaşılır. Bilginin kodlanması için, nanoyapılarda meydana gelen kuantum etkilerini kontrol edebilme yeteneğine sahip olmalıyız. Nanoyapılarda bilginin kodlanması için gerekli olan kuantum etkileri: yük taşıyıcılarının enerjisinin boyuta göre kuantlanması, girişim ve tünel etkisi olaylarıdır. Burada ana rol, boyutları 1nm civarında olan atom sistemleri olan kuantum noktalarına düşmektedir. Elektronlar kuantum noktalarında lokalize olduğu için, enerji spektrumları atomlardaki gibi ayrıktır. Bu nedenle, kuantum noktalarına yapay olarak oluşturulmuş atomlar gibi bakılır. Yapay olarak oluşturulmuş kuantum sistemleri, esasen A_3B_5 ve A_2B_6 tipi yarı iletkenlerden (Kane tipi yarı iletkenlerden) yapılırlar. Bu yüzden, A_3B_5 ve A_2B_6 tipi yarı iletkenlerden yapılmış kuantum yapılarında yukarıda bahsedilen kuantum olaylarını incelemek çok önemlidir.

Son yıllarda, yapay olarak oluşturulmuş yarı iletken kuantum yapılarının araştırmalarına ilgi daha da artmıştır. Bunun nedeni, bu kuantum yapılarının sadece optik ve elektronik özelliklerinin değil, aynı zamanda modern opto-elektronik cihazların ana temel elemanlarını oluşturmasıdır. Kuantum yapılarında yük taşıyıcılarının hareketi kısıtlandığından, bu nesnelere çok sayıda boyuta göre kuantlanmış enerji seviyeleri bulunmaktadır. Kuantum noktalarında yük taşıyıcılarının hareketi üç yönde kısıtlandığından, bir dizi boyuta göre kuantlanmış enerji seviyesi oluşur. Bu da, yapay olarak oluşturulmuş kuantum noktalarını yeni opto-elektronik cihazlara uygulamaya çekmektedir.

Yarı iletken heteroyapılarının araştırmalarında, bant fonksiyonu yaklaşımı yaygın olarak kullanılmaktadır. Çoğu zaman, bant fonksiyonu yaklaşımı, tüm heteroyapılar için tek bir efektif kütte denklemi olarak anlaşılır. Bant fonksiyonu yaklaşımının teorisi, 1992 yılında Burt tarafından çalışmalarında verilmiştir.

Bant fonksiyonunun bileşenleri her yerde süreklidir ve bunların türevleri için sınır koşulu, efektif kütte denklemlerini heteroyapıların yüzeyi üzerinden entegre ederek elde edilebilir.

Kuantum yapılarında yük taşıyıcılarının elektron spektrumlarının teorik araştırmalarında en yaygın kullanılan yaklaşım, iletkenlik ve valans bantları için parabolik bant yaklaşımıdır. Ancak, çoğu yarı iletkenin bant yapısı bu basit modelle tanımlanamaz. Basit parabolik bant modeli, yarı iletkenlerin elektronik ve optik özellikleri hakkında genel bir anlayış elde etmek için yararlı olsa da, onlar hakkında doğru bilgi almak için uygun değildir.

Bu nedenle, yarı iletkenlerin elektronik ve optik özelliklerini incelerken çok bantlı bir model kullanmak gereklidir. Foreman, Burt'un önerdiği yöntemden yararlanarak kuantum kuyuları için çok bantlı efektif kütte Hamiltoniyenini elde etmiştir. Daha sonra, iki ve üç boyutlu kısıtlanmış heteroyapılar için çok bantlı efektif kütte Hamiltoniyeni, Fonoberov ve diğerlerinin araştırmalarında çözümünü bulmuştur.

Böylece, çeşitli geometrik şekillere sahip yapay olarak oluşturulmuş kuantum yapılarının üretimine başlanmış ve kuantum telleri temelinde hazırlanan lazerler başarıyla test edilmiştir. Kuantum yapılarında boyutun küçülmesi, valans bandındaki hafif ve ağır deliklerin birleşmesini ayırır ve parabolik olmama durumunu artırır.

Bu nedenle, yapay olarak oluşturulmuş kuantum yapıları temelinde hazırlanan optik cihazların optimal tasarımı için, bu

nanoyapıların elektronik ve optik özelliklerini analiz ederken doğru teorik modelleri kullanmak çok önemlidir. Nanoyapıların temel avantajı, geometrik boyutlarını ve şeklini değiştirerek sistemin özelliklerini kontrol etmenin mümkün olmasıdır.

2. NANOYAPILAR HAKKINDA KISA BİLGİ

Yarı iletken elektroniğinin temel amaçlarından biri, elektronik cihazları minyatürleştirmek, yani boyutları 10-100 nm civarında olan yeni elektronik cihazlar üretmektir. 10-100 nm boyutu, içinde 10-100 atom bulunan yapay olarak oluşturulmuş nanoyapılardır.

60'lı yıllardan itibaren, yarı iletken alanında çalışan araştırmacılar, yalnızca doğal olarak var olan yapılarda (atomlarda, moleküllerde, kristallerde) değil, aynı zamanda yapay olarak oluşturulmuş, boyuta göre kuantlanmış yapılarda da araştırmalar yapabileceklerini anladılar. Bu tipi yarı metallerde ve InSb tipi yarı iletkenlerde boyuta göre kuantumlanma durumlarının varlığı hem teorik hem de deneysel olarak doğrulanmıştır. Artık kuantum mühendisliği, kuantum noktaları, kuantum telleri ve kuantum kuyuları gibi yeni yapay yapılar üretmeye başlamıştır. Nanoyapılardaki yük taşıyıcılarının hareketi kuantum fiziğinin yasalarına tabidir ve fiziksel özellikleri hacimsel durumdaki özelliklerden tamamen farklıdır. Nano-ölçeğe yaklaşıldıkça birçok yeni ve önemli özellik ortaya çıkar. Örneğin, yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarında, durum yoğunluklarında, efektif g-faktörlerinde, optik ve manyetik özelliklerinde ciddi değişiklikler meydana gelir. Şimdi, yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarında ve durum yoğunluklarında meydana gelen değişikliklere bakalım. Hacimsel durumda, doğrusal boyutları L_1 , L_2 ve L_3 olan bir kristalde elektronların enerji spektrumu için Schrödinger denklemini, kafesin periyodik potansiyelini dikkate almadan yazarsak (Horan ve Blau 1990; Norris vd. 1996):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \phi_k(r) = \varepsilon(k) \phi_k(r). \quad (2.1)$$

Denklem (2.1)'in çözümü düzlem dalga biçimindedir:

$$\phi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{k}\vec{r}). \quad (2.2)$$

Burada, $V = L_1 L_2 L_3$ kristalin hacmi, k_i dalga vektörünün bileşenleri, $k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ tam sayılar ve m_0 serbest elektronun kütlesidir. (2.2) ifadesini Denklem (2.1)'e koyduğumuzda, enerji ile dalga vektörü arasındaki ifadeyi elde ederiz:

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}. \quad (2.3)$$

Görüldüğü gibi, elektronların enerjisi yarı süreklidir ve yukarıdan sınırlı değildir. Şimdi hacimdeki durum yoğunluğunu hesaplayalım. Bilindiği gibi, durum yoğunluğu, birim hacimdeki birim enerji aralığına düşen durum sayısıdır. Durum yoğunluğunu δ fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki gibi hesaplayacağız (Davies 1998; Воробьев vd. 2001):

$$\rho_d(E) = \frac{2}{V_d} \sum_{nk} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{nk}). \quad (2.3)$$

Burada, 2 ile çarpma işlemi, enerji spektrumlarının spin tarafından bölünmesini hesaba katar; d serbestlik derecesini belirtir. $d = 3$ ise, bu bir hacim durumuna karşılık gelir. Denklem (2.3)'teki ifade (2.3)'ü ele alalım ve toplamdan integrale geçelim:

$$\rho_3(E) = \frac{2}{V_3} \frac{V_3}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}\right). \quad (2.4)$$

Küresel bir koordinat sistemine geçerek

$$\rho_3(E) = \frac{2}{V_3} \frac{V_3}{(2\pi)^3} \int k^2 dk \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}\right) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (2.5)$$

ve daha sonra açılar üzerinden integral alıp $x = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$ değişkenine

geçip $dk = \frac{1}{2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\right)^{1/2} x^{-1/2} dx$ hesaba katarsak, (2.5) ifadesini şu

şekilde yazarız:

$$\rho_3(E) = \frac{1}{2(\pi)^2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int x^{1/2} dx \delta(\varepsilon - x). \quad (2.6)$$

δ fonksiyonunun bilinen özelliğini kullanarak yukarıdaki integralin cevabı için (2.7) ifadesini elde ederiz:

$$\rho_3(E) = \frac{1}{2(\pi)^2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (2.7)$$

Yani, üç boyutlu durumda hal yoğunluğu, enerjinin kareköküyle orantılı olarak değişir. Yük taşıyıcılarının hareketi herhangi bir yönde sınırlandırılmışsa ve sınırlandırılmış bölgenin boyutu elektronun De Broglie dalga boyu mertebesindeyse, o yöndeki enerji kuantumlanma, diğer iki yöndeki hareket ise serbesttir. Bu tür nanoyapılara kuantum kuyuları veya 2 boyutlu sistemler denir.

Enerji spektrumlarını bulmak için, elektronun hareketinin yalnızca z yönünde sınırlandırıldığını varsayalım. Bu kısıtlama, potansiyel $V(z)$ ile verilir. Bu durum için Schrödinger denklemi şu şekildedir:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) + V(z) \right) \phi_k(x, y, z) = \varepsilon_n(k) \phi_k(x, y, z). \quad (2.8)$$

Bu denklemin çözümü

$$\phi_k(x, y, z) = e^{ik_x x + ik_y y} \varphi(z) \quad (2.9)$$

$\varphi(z)$ fonksiyonunu şu şekilde ararsak

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{d^2}{dz^2} \right) + V(z) - E \right) \varphi(z) = 0 \quad (2.10)$$

(2.10) denklemini elde ederiz. Burada,

$$E = \varepsilon_n(k) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_0} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_0}. \quad (2.11)$$

Potansiyeli sonsuz duvar potansiyeli olarak alırsak:

$$V(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < L_z \\ \infty, & z < 0, z > L_z. \end{cases} \quad (2.12)$$

Potansiyel duvarın içindeki dalga fonksiyonu

$$\varphi(z) = A \sin(k_z z) \quad (2.13)$$

şekilde arayalım. Burada, A normalleştirme faktörüdür ve

$$k_z = \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} E}. \quad (2.14)$$

Potansiyel kuyusunun sınırında dalga fonksiyonu sıfıra eşit olmalıdır

$$\sin(k_z L_z) = 0. \quad (2.15)$$

Buradan

$$k_z = \frac{\pi n}{L_z}, n = 1, 2, 3.. \quad (2.16)$$

bulunur. Bu ifadeyi (2.14) denkleminde ele alırsak, kuantum kuyularındaki elektronların enerji spektrumları için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\varepsilon_n(k) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_0} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_0} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\pi^2 n^2}{L_z^2}. \quad (2.17)$$

(2.17) ifadesinden görülebileceği gibi, kuantum kuyularındaki elektronların enerji spektrumu üç kuantum sayısı (k_x, k_y, n) ile karakterize edilir.

Kuantum kuyularındaki durum yoğunluğunu hesaplayalım:

$$\rho_2(E) = \frac{2}{V_2} \sum_{nk} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{nk}). \quad (2.18)$$

Denklem (2.18)'da kuantum sayıları k üzerinde toplamdan integrale geçelim ve polar koordinat sistemine geçelim:

$$\rho_2(E) = \frac{2}{V_2} \frac{V_2}{(2\pi)^2} \sum_n \int k_{\perp} dk_{\perp} d\phi \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_0} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\pi^2 n^2}{L_z^2}\right). \quad (2.19)$$

Burada,

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad x = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_0}. \quad (2.20)$$

Değişkene geçerseniz:

$$\rho_2(E) = \frac{2}{V_2} \frac{2\pi V_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{2m_0}{\hbar^2} \sum_n \int dx \delta\left(\varepsilon - x - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\pi^2 n^2}{L_z^2}\right) \theta(x). \quad (2.21)$$

Burada, $\theta(x)$ Heaviside fonksiyonudur. Bu fonksiyon, argümanın pozitif ve sıfır değerleri için bire, negatif değerler için sıfıra eşittir. Bu nedenle, kuantum kuyularındaki durum yoğunluğu şu şekildedir:

$$\rho_2(E) = \frac{1}{\pi} \frac{m_0}{\hbar^2} \sum_n \theta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\pi^2 n^2}{L_z^2}\right). \quad (2.22)$$

Kuantum kuyularındaki durum yoğunluğunun yatay yöndeki adımlardan oluştuğunu unutmayın. Yük taşıyıcılarının hareketini iki yönde kısıtlarsak, parçacıkların yalnızca bir serbestlik derecesi olur. Bu tür nanoyapılara kuantum telleri denir.

İki yönde sonsuz bir kuyu potansiyeli alıp Schrödinger denklemini çözersek, elektronların enerji spektrumları için (2.23) ifadesini elde ederiz:

$$\varepsilon_n(k) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_0} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_y^2}{2m_0 L_y^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_z^2}{2m_0 L_z^2}. \quad (2.23)$$

Yukarıda yazılan kuralı kullanarak kuantum tellerindeki durum yoğunluğunu hesaplırsak durum yoğunluğu için (2.24) formülünü elde ederiz:

$$\rho_1(E) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sum_{n_y, n_z} \theta(\varepsilon - \varepsilon(n_y, n_z)) \cdot \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon(n_y, n_z))^{1/2}}. \quad (2.24)$$

Burada,

$$\varepsilon(n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 \pi^2 n_y^2}{2m_0 L_y^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_z^2}{2m_0 L_z^2}. \quad (2.25)$$

Kuantum tellerindeki durum yoğunluğu, kütle içindeki harici bir manyetik alan durumundaki durum yoğunluğuyla aynıdır.

Biraz daha ileri gidip yük taşıyıcılarının hareketini üç yönde de kısıtlarsak, parçacıkların enerji spektrumları üç yönde de boyuta göre kuantize olacaktır. Bu tür nanoyapılara sıfır boyutlu sistemler veya kuantum noktaları denir. Kuantum noktalarındaki yük taşıyıcılarının enerji spektrumları, tıpkı atomlarda olduğu gibi sonsuz sayıda ayrık enerji seviyesinden oluşur. Moleküler ışın epitaksi yöntemi kullanılarak keyfi şekil ve boyutta kuantum noktaları elde etmenin mümkün olduğu unutulmamalıdır. Kuantum noktalarının şeklini ve boyutunu değiştirerek sistemin fiziksel özelliklerini kontrol etmek mümkündür. Ayrıca, kuantum noktaları, yeni ve umut verici elektronik cihazlar yaratmak için ilgi çekici nesnelere sahiptir.

Kuantum noktalarındaki üç yöndeki sonsuz duvar potansiyeli durumunda elektronların enerji spektrumları için (Norris vd. 1996):

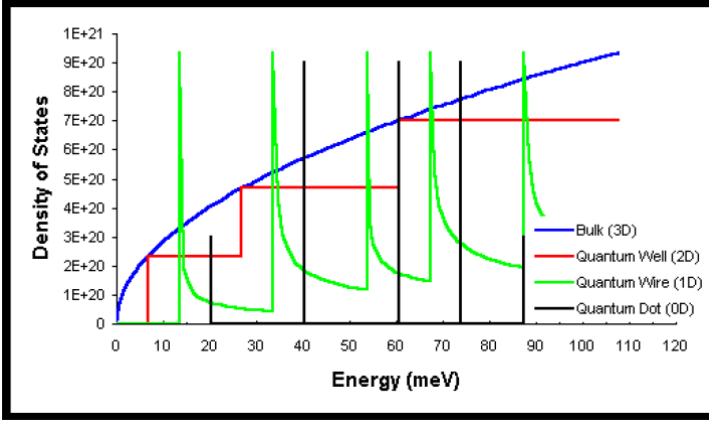
$$\varepsilon_n(k) = \frac{\hbar^2 \pi^2 n_x^2}{2m_0 L_x^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_y^2}{2m_0 L_y^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_z^2}{2m_0 L_z^2}. \quad (2.26)$$

Şu ifadeyi elde edeceğiz. Durum yoğunluğu:

$$\rho_0(E) = 2 \sum_n \delta \left(E - \frac{\hbar^2 \pi^2 n_x^2}{2m_0 L_x^2} - \frac{\hbar^2 \pi^2 n_y^2}{2m_0 L_y^2} - \frac{\hbar^2 \pi^2 n_z^2}{2m_0 L_z^2} \right) \quad (2.27)$$

göre belirlenir.

(2.27) ifadesinden görülebileceği gibi, kuantum noktalarındaki durum yoğunluğu ayrı izole edilmiş tepelerden oluşur. Şekil 2.1'de ayrıca, yığın, kuantum kuyuları, kuantum telleri ve kuantum noktalarındaki durum yoğunluğunun enerji bağımlılıklarını da gösterir (Norris vd. 1996). Bu paragrafta, yalnızca sınırlayıcı potansiyeli olarak sonsuz kuyu potansiyeline sahip nanoyapıları ele aldık. İlerleyen bölümlerde, yük taşıyıcılarının enerji spektrumları ve dalga fonksiyonları, yarı iletkenlerin gerçek bant yapısı dikkate alınarak küresel kuantum noktalarında ve silindirik kuantum tellerinde bulunacaktır. Nano boyutlu yarı iletken kristallerin optik özellikleri, geniş uygulama potansiyelleri nedeniyle araştırmacıların dikkatini çekmektedir (Alivisatos 1996; Brus 1991). Nanoyapıların soğurma ve fotoluminesans spektrumları geniş bir enerji aralığını (1-2 eV'ye kadar) kapsadığından, nanoyapıların boyutlarını değiştirerek boyutlarını değiştirmek, tünel lazerlerde ve ışık yayan diyotlarda yaygın olarak üretilmelerine yol açmıştır. Örneğin, CdSe nanokristalleri, toplu hallerinden 1.8 eV ila 3 eV bant aralığıyla hazırlanmıştır (Norris vd. 1996). Bu nanoyapılar, kendilerinden beklenen tüm optik spektrumu kapsar. Nanokristallerin bir diğer özelliği de uygulama alanlarını biraz genişleten doğrusal olmayan optik özellikleridir (Horan ve Blau 1990; Schmitt-Rink, Miller, ve Chemla 1987).



Şekil 2.1. Nanoyapılarda durum yoğunluklarının enerjiye bağlılık grafiği

Yarı iletken nano kristallerin doğrusal ve doğrusal olmayan optik özellikleri, boyuta göre kuantumlanmış elektron ve deliklerin enerji seviyeleri arasındaki geçişin bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Elektronlar ve delikler arasındaki Coulomb etkileşimi e^2/ka mertebesinde; burada, a nano kristalin yarıçapı, k ise yarı iletkenin dielektrik sabitidir. Kuantumlanmış enerji, nanokristalin boyutu küçüldükçe $1/a^2$ gibi artarken, $1/a$ bağıntısıyla orantılı olarak artan Coulomb enerjisi, elektron ve deliklerin kuantumlanmış enerjilerine küçük bir katkı yapar. Nanoyapılarda soğurma spektrumunun ilk teorik analizi, iletim ve valans bantlarının enerji spektrumları parabolik olarak kabul edilerek (Brus 1991; Рустамов ve Бабаев 1998) çalışmalarında yapılmıştır. Elde edilen soğurma spektrumu oldukça basittir:

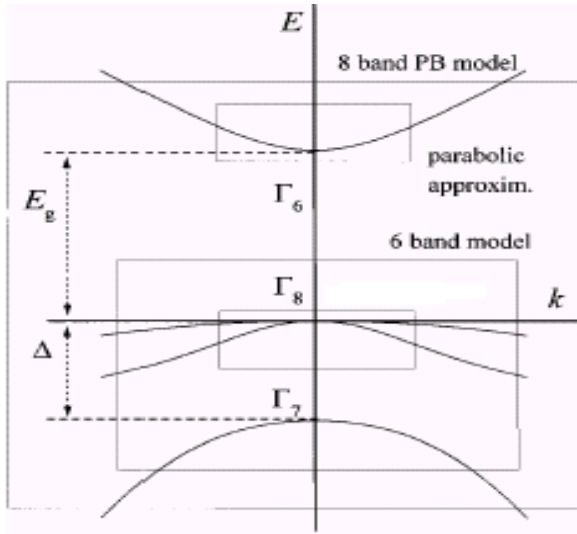
$$\hbar\omega_\nu = E_g + E_\nu^h(a) + E_\nu^e(a) - 1.8 \frac{e^2}{\kappa a}, \text{ burada, } E_g \text{ yasak bandın}$$

genişliği, $E_\nu^{h,e}(a) \approx 1/a^2$ ise ν -inci deliğin ve elektronun nanokristaldeki enerjileridir. Coulomb etkileşim enerjisi, birinci derece pertürbasyon teorisi yardımıyla hesaplanmıştır.

Basit parabolik bant modeli, yarı iletken nanokristallerin enerji spektrumlarını doğru bir şekilde ifade etmez. Şekil 2.2'de kübik

simetriye sahip yarı iletkenlerin (GaAs, InAs, CdSe, CdTe, CdS veya InSb) bant yapısı gösterilmiştir. İletim bandı sadece bandın tabanında paraboliktir. Valans bandı, 4 kat dejenere olmuş ağır ve hafif delikleri temsil eden Γ_8 ve spin-yörünge ayrılmış Γ_7 bandını içerir. Basit parabolik bant modeli, yarı iletkenlerin optik özelliklerini derinlemesine incelemek için uygun değildir.

Nanoyapıların optik özellikleri, delikler ve elektronlar arasındaki geçiş sırasında ortaya çıkar. Eğer bizi sadece valans bandı etrafındaki deliklerin spektrumu ilgilendiriyorsa, Luttinger-Kon modeli kullanılmalıdır. Küresel bir yaklaşımla, bu modelde iki parametre, γ_1^L ve γ^L , bulunur. Bu parametreler kullanılarak hafif ve ağır deliklerin etkin kütleleri $m_{lh} = m_0 / (\gamma_1^L + 2\gamma^L)$, $m_{hh} = m_0 / (\gamma_1^L - 2\gamma^L)$ olarak tanımlanır, burada, m_0 serbest elektronun kütlesidir. Bu model kullanılarak deliklerin enerji seviyeleri (Xia 1989; ЕКИМОВ vd. 1985) çalışmalarında bulunmuştur. Ancak, uyarılmış delik seviyelerini bu modelle ifade etmek mümkün değildir. Bu nedenle, üç delik bandının da göz önünde bulundurulması gerekir.



Şekil 2.2. Kane modelinde InSb tipi yarı iletkenlerin bant yapısı

Bu model 6-bantlı bir modeldir (Григорян vd. 1990). 6-bantlı model kullanılarak, deliklerin enerji seviyeleri CdSe nanokristali örneğinde hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar, soğurma spektrumları (Ekimov 1991), deliklerin ısınması (Norris vd. 1996) ve fotolüminesansın uyarılmasına ilişkin deneyleri (Ekimov 1991; Norris vd. 1994; Rodrigues vd. 1995) açıklamaktadır. 6-bantlı model, iletim ve valans bantları arasındaki etkileşimi dikkate almaz. Bu modelde, elektronların ve deliklerin sınırlandırılmış enerji seviyeleri birbirinden bağımsız olarak hesaplanmıştır. Bu model, CdSe ve CdS gibi yasak bant genişliği büyük olan yarı iletkenler için iyi bir yaklaşım olsa da yasak bant genişliği küçük olan yarı iletkenler için kullanışlı değildir.

Görüldüğü gibi, iletim bandı ile valans bandının etkileşimini ve valans bandının karmaşıklığını göz önünde bulundurarak, kuantum yapılarındaki yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını hesaplamak için çok zonalı bir model geliştirilmesine gerek vardır. Bu boşluğu gidermek için (Gashimzade, Babaev, ve Bagirov 2000; Rustamov ve Babaev 1985; Воробьев vd. 2001; Григорян vd. 1990) çalışmalarına dayanarak, dönme grubuna göre değişmez kalan diferansiyel denklem sistemini kullanarak, InAs ve HgTe tipi yarı iletkenlerin küresel kuantum noktalarında tüm yük taşıyıcılarının, yani elektronların, hafif, ağır ve spin-yörünge etkileşimi sonucunda ayrılmış deliklerin enerji spektrumlarını aynı anda ifade eden çok zonalı bir teori oluşturduk.

Literatürde (Pryor 1998; Григорян vd. 1990; ЕКИМОВ vd. 1985) A_3B_5 ve A_2B_6 tipi yarı iletken kuantum noktalarında deliklerin enerji spektrumlarını bulmak için küresel simetrik Luttinjer modeli kullanılmaktadır.

(Sercel, Efros, ve Rosen 1999; Sercel ve Vahala 1990, 1990) numaralı çalışmalarda, küresel kuantum noktalarında ve silindirik kuantum tellerinde yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını

bulmak için çok zonalı bant fonksiyonu metodu sunulmuştur. GaAs/AlGaAs kuantum noktalarında elektronların, hafif ve ağır deliklerin temel hallerinin, kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı incelenmiştir. Ancak, spin-yörünge etkileşimi sonucunda ayrılan delik bandı dikkate alınmamıştır. Elektron ve deliklerin boyuta göre kuantize olmuş enerji seviyelerinin boyuta bağlılığı, yarı iletken küresel kuantum nanokristallerinde 8-zonalı Luttinger-Kohn modeli kullanılarak Efros (Efros ve Rosen 1998) tarafından araştırılmıştır.

Bu model, elektronların, hafif ve spin-yörünge etkileşimi sonucunda ayrılan deliklerin, ağır deliklerin enerjisini ve hafif yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarının parabolik olmayan doğasını dikkate almayı mümkün kılar. Aynı zamanda, Brillouin bölgesinin merkezinde, Γ noktası etrafındaki enerji spektrumunu çok iyi ifade eder. Hesaplamalar sonsuz duvar potansiyeli durumu için yapılmıştır. Hesaplamalar, yasak bandı dar olan InSb, orta seviyede yasak bandı olan CdTe ve geniş yasak bandı olan CdS nanokristalleri için gerçekleştirilmiştir. Bu hesaplamalardan elde edilen sonuçlar, iletim ve valans bantlarının etkileşimi dikkate alındığında hem dar hem de geniş yasak bandı olan yarı iletken nanoyapılarında enerji spektrumlarında ciddi değişiklikler meydana geldiğini göstermiştir.

Bunlara ek olarak, küçük boyutlu sistemlerde yasak bandın genişliği, nanokristalin boyutu değiştikçe değişir. Bu durum, valans bandından iletim bandına geçiş enerjisinin nanoyapının boyutuna bağlılığını ortaya çıkarır.

Piramit şeklindeki InAs/GaAs noktalarında yük taşıyıcılarının enerji spektrumları (Pryor 1998) çalışmasında hesaplanmıştır. Belirtmek gerekir ki, yukarıda adı geçen çalışmalarda yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını bulmak için çeşitli metotlar kullanılmıştır.

(Efros ve Rosen 1998; Pryor 1998; Vahala ve Sercel 1990) numaralı çalışmalarda, GaAs/AlGaAs ve InAs/GaSb tipi

kuantum noktalarında elektronların enerji spektrumlarının parabolik olmayan doğası incelenmiştir. Parabolik olmayan etkinin enerji spektrumları üzerindeki etkisi, InAs/InSb esaslı kuantum noktalarında daha büyüktür. Öte yandan, (Григорян vd. 1990) numaralı çalışmada, A_3B_5 tipi yarı iletkenler temel alınarak hazırlanan kuantum noktalarında, spin-yörünge ayrılmış deliklerin de dikkate alınmasının önemli olduğu gösterilmiştir. InAs için hem enerji spektrumlarının parabolik olmayan doğasının hem de spin-yörünge ayrılmış deliklerin dikkate alınması önemlidir. Bunun nedeni, InAs tipi kuantum noktalarında yasak bandın genişliğinin, spin-yörünge ayrılması seviyesinde olmasıdır ($E_g \approx \Delta \approx 0.4eV$).

Bu bölümde, (Gashimzade vd. 2000; Rustamov ve Babaev 1985; Бабаев 1991; Рустамов ve Бабаев 1998) numaralı çalışmalara dayanarak, A_3B_5 tipi yarı iletken kuantum noktalarında yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını bulmak için evrensel bir yöntem sunulmuştur. Bu yöntem, dönme grubuna göre değişmez kalan diferansiyel denklem sistemine dayanır ve herhangi bir sayıda bandın etkileşimini dikkate alarak, ilk adımdan itibaren radyal fonksiyonlar için denklem sistemini yazmaya olanak tanır.

(Rustamov ve Babaev 1985; Бабаев 1991; Екимов vd. 1985) numaralı çalışmalarda, dönme grubuna göre değişmez kalan diferansiyel denklem sistemi kullanılarak, hacimsel durumdaki A_3B_5 tipi yarı iletkenlerdeki tüm yük taşıyıcılarının: elektronların, hafif ve ağır deliklerin ve spin-yörünge etkileşimi sonucunda ayrılmış deliklerin enerji spektrumlarını aynı anda ifade eden genelleştirilmiş bir Hamiltonyen kurulmuş ve yük taşıyıcılarının enerji spektrumları ve dalga fonksiyonları bulunmuştur.

(1/2,1) ve ağır deliklerin enerji spektrumlarını elde etmek için diğer iki bandı da göz önünde bulundurmalıyız: (5/2,2) ve (3/2,2).

Yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını hesaplamak için, dönme grubuna göre değişmez kalan birinci dereceden diferansiyel denklem sistemini kullanacağız (Гельфанд, Минлос, ve Шапиро 1958; Любарский 1957). Gelfand ve Lyubarskiy'in kitaplarında, dönme grubuna göre değişmez kalan birinci dereceden diferansiyel denklemler sisteminin genel formu hem kartezyen hem de küresel koordinat sistemlerinde verilmiştir. Belirtmek gerekir ki, her iki kitapta da küresel koordinat sistemindeki denklemlerin yazılışında baskı hatası bulunmaktadır. Biz küresel koordinatlarda radyal fonksiyonlar için Gelfand'ın kitabında yazılan denklemleri kullanacağız (Гельфанд vd. 1958).

Radyal fonksiyonlar için diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki gibidir (Гельфанд vd. 1958):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau'} C_{\ell,\ell-1}^{\tau\tau'} \left[\sqrt{(\ell^2 - m^2)} \frac{df_{\ell-1,m,\tau'}^{\ell_0}}{dr} - \frac{(\ell-1)\sqrt{(\ell^2 - m^2)}}{r} f_{\ell-1,m,\tau'}^{\ell_0} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2r} \sqrt{(\ell+m-1)(\ell+m)} \sqrt{(\ell_0-m+1)(\ell_0+m)} f_{\ell-1,m-1,\tau'}^{\ell_0} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2r} \sqrt{(\ell-m-1)(\ell-m)} \sqrt{(\ell_0+m+1)(\ell_0-m)} f_{\ell-1,m+1,\tau'}^{\ell_0} \right] + \\
 & + C_{\ell,\ell}^{\tau\tau'} \left[m \frac{df_{\ell,m,\tau'}^{\ell_0}}{dr} + \frac{m}{r} f_{\ell,m,\tau'}^{\ell_0} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2r} \sqrt{(\ell-m+1)(\ell+m)} \sqrt{(\ell_0-m+1)(\ell_0+m)} f_{\ell,m-1,\tau'}^{\ell_0} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2r} \sqrt{(\ell+m+1)(\ell-m)} \sqrt{(\ell_0+m+1)(\ell_0-m)} f_{\ell,m+1,\tau'}^{\ell_0} \right] + \\
 & + C_{\ell,\ell+1}^{\tau\tau'} \left[\sqrt{((\ell+1)^2 - m^2)} \frac{df_{\ell+1,m,\tau'}^{\ell_0}}{dr} + \frac{(\ell+2)\sqrt{((\ell+1)^2 - m^2)}}{r} f_{\ell+1,m,\tau'}^{\ell_0} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2r} \sqrt{(\ell-m+2)(\ell-m+1)} \sqrt{(\ell_0-m+1)(\ell_0+m)} f_{\ell+1,m-1,\tau'}^{\ell_0} - \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2r} \sqrt{(\ell+m+2)(\ell+m+1)} \sqrt{(\ell_0+m+1)(\ell_0-m)} f_{\ell+1,m+1,\tau'}^{\ell_0} \right] + \\
 & + i\chi f_{\ell,m,\tau}^{\ell_0}(r) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada, $C_{l,\ell}^{rr'}$ katsayıları sabit sayılardır, $f_{l,m,\tau}^{\ell_0}(r)$ aranan fonksiyonlardır, χ sabit bir sayıdır, $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$, $l_0 \geq l$ ve $-\ell_0 \leq m$. (2.1) denklem sistemi, rastgele sayıda bant dikkate alarak o bantlardaki yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını bulmak için hazır yazılmış bir diferansiyel denklemler sistemidir.

Belirlenen bantları karakterize eden radyal fonksiyonlar için birinci mertebeden diferansiyel denklemleri (3.1) sisteminden faydalanarak yazalım.

$$C_{1/2,1/2}^{0,1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{1/2,1/2,1}^{\ell_0} + \frac{\ell_0 + 1/2}{2r} f_{1/2,-1/2,1}^{\ell_0} \right] +$$

$$+ C_{1/2,3/2}^{0,1} \left[\sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{5}{2r} \right) f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} + \sqrt{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{3/2,3/2,1}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{1/2,1/2,0}^{\ell_0} = 0, \quad (3.2)$$

$$C_{1/2,1/2}^{0,1} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{1/2,-1/2,1}^{\ell_0} - \frac{\ell_0 + 1/2}{2r} f_{1/2,-1/2,1}^{\ell_0} \right] +$$

$$+ C_{1/2,3/2}^{0,1} \left[\sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{5}{2r} \right) f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} + \sqrt{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{3/2,-3/2,1}^{\ell_0} \right] +$$

$$+ i\chi f_{1/2,-1/2,0}^{\ell_0} = 0, \quad (3.3)$$

$$C_{3/2,1/2}^{1,0} \left[-\frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{1/2,1/2,0}^{\ell_0} \right] + C_{3/2,3/2}^{1,2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,3/2,2}^{\ell_0} + \frac{\alpha}{r} f_{3/2,1/2,2}^{\ell_0} \right] +$$

$$+ C_{3/2,5/2}^{1,2} \left[2 \left(\frac{d}{dr} + \frac{7}{2r} \right) f_{5/2,3/2,2}^{\ell_0} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{r} f_{5/2,1/2,2}^{\ell_0} + \frac{\sqrt{5} \sqrt{(\ell_0 + 5/2)(\ell_0 - 3/2)}}{r} f_{5/2,5/2,2}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{3/2,3/2,1}^{\ell_0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& C_{3/2,1/2}^{1,0} \left[-\frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{1/2,-1/2,0}^{\ell_0} \right] + C_{3/2,3/2}^{1,2} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,-3/2,2}^{\ell_0} - \frac{\alpha}{r} f_{3/2,-1/2,2}^{\ell_0} \right] + \\
& + C_{3/2,5/2}^{1,2} \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{d}{dr} + \frac{7}{2r} \right) f_{5/2,-3/2,2}^{\ell_0} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{r} f_{5/2,1/2,2}^{\ell_0} + \\ & \frac{\sqrt{5} \sqrt{(\ell_0 + 5/2)(\ell_0 - 3/2)}}{r} f_{5/2,-5/2,2}^{\ell_0} \end{aligned} \right] + i\chi f_{3/2,-3/2,1}^{\ell_0} = 0, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{3/2,1/2}^{1,0} \left[\sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{2r} \right) f_{1/2,1/2,0}^{\ell_0} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{1/2,-1/2,0}^{\ell_0} \right] + \\
& C_{3/2,3/2}^{1,2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,1/2,2}^{\ell_0} - \frac{\alpha}{r} f_{3/2,3/2,2}^{\ell_0} + \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{3/2,-1/2,2}^{\ell_0} \right] + \\
& + C_{3/2,5/2}^{1,2} \left[\begin{aligned} & \sqrt{6} \left(\frac{d}{dr} + \frac{7}{2r} \right) f_{5/2,1/2,2}^{\ell_0} + 2 \frac{\alpha}{r} f_{5/2,3/2,2}^{\ell_0} + \\ & \frac{\sqrt{6}(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{5/2,-1/2,2}^{\ell_0} \end{aligned} \right] + i\chi f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} = 0, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{3/2,1/2}^{1,0} \left[\sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{2r} \right) f_{1/2,-1/2,0}^{\ell_0} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{1/2,1/2,0}^{\ell_0} \right] + \\
& C_{3/2,3/2}^{1,2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,-1/2,2}^{\ell_0} + \frac{\alpha}{r} f_{3/2,-3/2,2}^{\ell_0} - \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{3/2,1/2,2}^{\ell_0} \right] + \\
& + C_{3/2,5/2}^{1,2} \left[\begin{aligned} & \sqrt{6} \left(\frac{d}{dr} + \frac{7}{2r} \right) f_{5/2,-1/2,2}^{\ell_0} + 2 \frac{\alpha}{r} f_{5/2,-3/2,2}^{\ell_0} + \\ & \frac{\sqrt{6}(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{5/2,1/2,2}^{\ell_0} \end{aligned} \right] + i\chi f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} = 0, \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{1/2,1/2}^{1,0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{1/2,1/2,0}^{\ell_0} + \frac{\ell_0 + 1/2}{2r} f_{1/2,-1/2,0}^{\ell_0} \right] + \\
& + C_{1/2,3/2}^{1,2} \left[\begin{aligned} & \sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{5}{2r} \right) f_{3/2,1/2,2}^{\ell_0} + \sqrt{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{3/2,-1/2,2}^{\ell_0} + \\ & \frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{3/2,3/2,2}^{\ell_0} \end{aligned} \right] + i\chi f_{1/2,1/2,1}^{\ell_0} = 0, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{1/2,1/2}^{1,0} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{1/2,-1/2,0}^{\ell_0} - \frac{\ell_0 + 1/2}{2r} f_{1/2,-1/2,0}^{\ell_0} \right] + \\
& + C_{1/2,3/2}^{1,2} \left[\sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{5}{2r} \right) f_{3/2,-1/2,2}^{\ell_0} + \sqrt{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{3/2,1/2,2}^{\ell_0} + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{3/2,-3/2,2}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{1/2,-1/2,1}^{\ell_0} = 0, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{3/2,1/2}^{2,1} \left[-\frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{1/2,1/2,1}^{\ell_0} \right] + \\
& C_{3/2,3/2}^{2,1} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,3/2,1}^{\ell_0} + \frac{\alpha}{r} f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{3/2,3/2,2}^{\ell_0} = 0, \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{3/2,1/2}^{2,1} \left[-\frac{\sqrt{2}\alpha}{r} f_{1/2,-1/2,1}^{\ell_0} \right] + \\
& C_{3/2,3/2}^{2,1} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,-3/2,1}^{\ell_0} - \frac{\alpha}{r} f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{3/2,-3/2,2}^{\ell_0} = 0, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{3/2,1/2}^{2,1} \left[\sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{2r} \right) f_{1/2,1/2,1}^{\ell_0} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{1/2,-1/2,1}^{\ell_0} \right] + \\
& C_{3/2,3/2}^{2,1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} - \frac{\alpha}{r} f_{3/2,3/2,1}^{\ell_0} + \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} \right] + \\
& + i\chi f_{3/2,1/2,2}^{\ell_0} = 0, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{3/2,1/2}^{2,1} \left[\sqrt{2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{2r} \right) f_{1/2,-1/2,1}^{\ell_0} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{1/2,1/2,1}^{\ell_0} \right] + \\
& C_{3/2,3/2}^{2,1} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} + \frac{\alpha}{r} f_{3/2,-3/2,1}^{\ell_0} - \frac{(\ell_0 + 1/2)}{r} f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} \right] + \\
& + i\chi f_{3/2,-1/2,2}^{\ell_0} = 0, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{5/2,3/2}^{2,1} \left[-\frac{\sqrt{5}\sqrt{(\ell_0 + 5/2)(\ell_0 - 3/2)}}{r} f_{3/2,3/2,1}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{5/2,5/2,2}^{\ell_0} = 0, \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$C_{5/2,3/2}^{2,1} \left[-\frac{\sqrt{5}\sqrt{(\ell_0 + 5/2)(\ell_0 - 3/2)}}{r} f_{3/2,-3/2,1}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{5/2,-5/2,2}^{\ell_0} = 0, \quad (3.15)$$

$$C_{5/2,3/2}^{2,1} \left[2\left(\frac{d}{dr} - \frac{3}{2r}\right) f_{3/2,3/2,1}^{\ell_0} - 2\frac{\alpha}{r} f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{5/2,3/2,2}^{\ell_0} = 0, \quad (3.16)$$

$$C_{5/2,3/2}^{2,1} \left[2\left(\frac{d}{dr} - \frac{3}{2r}\right) f_{3/2,-3/2,1}^{\ell_0} - 2\frac{\alpha}{r} f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{5/2,-3/2,2}^{\ell_0} = 0, \quad (3.17)$$

$$C_{5/2,3/2}^{2,1} \left[\sqrt{6}\left(\frac{d}{dr} - \frac{3}{2r}\right) f_{3/2,1/2,1}^{\ell_0} - \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\alpha}{r} f_{3/2,3/2,1}^{\ell_0} - \frac{\sqrt{6}(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{3/2,-1/2,2}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{5/2,1/2,2}^{\ell_0} = 0, \quad (3.18)$$

$$C_{5/2,3/2}^{2,1} \left[\sqrt{6}\left(\frac{d}{dr} - \frac{3}{2r}\right) f_{3/2,-1/2,1}^{\ell_0} - \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\alpha}{r} f_{3/2,-3/2,1}^{\ell_0} - \frac{\sqrt{6}(\ell_0 + 1/2)}{2r} f_{3/2,1/2,2}^{\ell_0} \right] + i\chi f_{5/2,-1/2,2}^{\ell_0} = 0, \quad (3.19)$$

Burada, $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(\ell_0 + \frac{3}{2}\right)\left(\ell_0 - \frac{1}{2}\right)}$.

Denklemler sistemi yazılırken, indeksler s, p, d hallerına karşılık geldikleri açıkça görülecek şekilde seçilmiştir. $\tau = 0$, $\tau = 1$ ve $\tau = 2$ sırasıyla orbital kuantum sayısının 0, 1, 2 değerlerine karşılık gelir.

Yukarıdaki denklemleri toplayıp çıkarırsak, tek ve çift haller için denklemleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \frac{-ia}{2(E-E_g)} \left[\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp (l_0 + 1/2)}{r} \right] f_3^\mp - \\ & \frac{i\sqrt{2}b}{(E-E_g)} \left\{ \left[\frac{d}{dr} + \frac{5 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_2^\pm + \frac{\alpha}{r} f_1^\pm \right\} + f_0^\pm = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{i\sqrt{2}b}{E} \frac{\alpha}{r} f_0^\pm - \frac{ic}{E} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_4^\mp + \frac{\alpha}{r} f_5^\mp \right] - \\ & \left. - \frac{ie}{E} \left\{ \frac{\sqrt{5} \sqrt{(l_0 + 5/2)(l_0 - 3/2)}}{1} \frac{f_6^\pm}{r} + \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{r} f_8^\pm + 2 \left(\frac{d}{dr} + \frac{7}{2r} \right) f_7^\pm \right\} \right] + f_1^\pm = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{i\sqrt{2}b}{E} \left[\frac{d}{dr} - \frac{1 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_0^\pm - \\ & \frac{ic}{E} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp (2l_0 + 1)}{r} \right] f_5^\mp - \frac{\alpha}{r} f_4^\mp \right\} \\ & - \frac{ie}{E} \left\{ 2 \frac{\alpha}{r} f_7^\pm + \sqrt{6} \left[\frac{d}{dr} + \frac{7 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_8^\pm \right\} + f_2^\pm = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{ia}{2(E+\Delta)} \left[\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp (l_0 + 1/2)}{r} \right] f_0^\mp - \\ & \frac{i\sqrt{2}d}{E+\Delta} \left\{ \left[\frac{d}{dr} + \frac{5 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_5^\pm + \frac{\alpha}{r} f_4^\pm \right\} + f_3^\pm = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{i\sqrt{2}d}{E-E_0} \frac{\alpha}{r} f_3^\pm - \frac{ic}{E-E_0} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f_1^\mp + \frac{\alpha}{r} f_2^\mp \right\} f_1^\pm + f_4^\pm = 0, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i\sqrt{2}d}{E-E_0} \left[\frac{d}{dr} - \frac{1 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_3^\pm - \\
& -\frac{ic}{E-E_0} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dr} - \frac{1 \mp (2l_0 + 1)}{r} \right] f_2^\mp - \frac{\alpha}{r} f_1^\mp \right\} + f_5^\pm = 0, \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$\frac{i\sqrt{5}e}{E-E_0-\Delta_0} \frac{\sqrt{(l_0+5/2)(l_0-3/2)}}{r} f_1^\pm + f_6^\pm = 0, \quad (3.26)$$

$$-\frac{ie}{E-E_0-\Delta_0} \left[2 \left(\frac{d}{dr} - \frac{3}{2r} \right) f_1^\pm - \frac{2\alpha}{r} f_2^\pm \right] + f_7^\pm = 0, \quad (3.27)$$

$$-\frac{ie}{E-E_0-\Delta_0} \left[\sqrt{6} \left[\frac{d}{dr} - \frac{3 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_2^\pm - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{r} f_1^\pm \right] + f_8^\pm = 0, \quad (3.28)$$

Burada, aşağıdaki gösterimler kabul edilmiştir:

$$\begin{aligned}
f_0^\pm &= f_{1/2,1/2,0}^{l_0} \pm f_{1/2,-1/2,0}^{l_0}; & f_5^\pm &= f_{3/2,1/2,2}^{l_0} \pm f_{3/2,-1/2,2}^{l_0}; \\
f_1^\pm &= f_{3/2,3/2,1}^{l_0} \pm f_{3/2,-3/2,1}^{l_0}; & f_6^\pm &= f_{5/2,5/2,2}^{l_0} \pm f_{5/2,-5/2,2}^{l_0}; \\
f_2^\pm &= f_{3/2,1/2,1}^{l_0} \pm f_{3/2,-1/2,1}^{l_0}; & f_7^\pm &= f_{5/2,3/2,2}^{l_0} \pm f_{5/2,-3/2,2}^{l_0}; \\
f_3^\pm &= f_{1/2,1/2,1}^{l_0} \pm f_{1/2,-1/2,1}^{l_0}; & f_8^\pm &= f_{5/2,1/2,2}^{l_0} \pm f_{5/2,-1/2,2}^{l_0}; \\
f_4^\pm &= f_{3/2,3/2,2}^{l_0} \pm f_{3/2,-3/2,2}^{l_0}.
\end{aligned} \quad (3.29)$$

Ayrıca:

$$\begin{aligned}
\frac{C_{1/2,1/2}^{0,1}}{i\chi} &= -\frac{ia}{E - E_g}; & \frac{C_{1/2,1/2}^{1,0}}{i\chi} &= \frac{ia}{E + \Delta}; \\
\frac{C_{1/2,3/2}^{0,1}}{i\chi} &= -\frac{ib}{E - E_g}; & \frac{C_{3/2,1/2}^{1,0}}{i\chi} &= -\frac{ib}{E}; \\
\frac{C_{3/2,3/2}^{1,2}}{i\chi} &= -\frac{ic}{E}; & \frac{C_{3/2,3/2}^{2,1}}{i\chi} &= -\frac{ic}{E - E_0}; \\
\frac{C_{1/2,3/2}^{1,2}}{i\chi} &= -\frac{id}{E + \Delta}; & \frac{C_{3/2,1/2}^{2,1}}{i\chi} &= -\frac{id}{E - E_0}; \\
\frac{C_{3/2,5/2}^{1,2}}{i\chi} &= -\frac{ie}{E}; & \frac{C_{5/2,3/2}^{2,1}}{i\chi} &= -\frac{ie}{E - E_0 - \Delta_0}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Burada, E_g yasak bandın genişliği, Δ spin-yörünge ayrılmasının genişliği, E_0 ve $E_0 + \Delta_0$ ise ağır deliklerin enerji spektrumlarını elde etmek için yukarıda yer alan iletim bandı enerjileridir. a, b, c, d ve e parametreleri, iletim ve valans bantları arasındaki momentum operatörünün matris elementleridir. Denklemler sistemi, tek ve çift haller için ayrı ayrı yazılmıştır. (3.20)-(3.28) denklemleri, elektronların, hafif ve ağır deliklerin ve spin-yörünge ayrılmış deliklerin enerji spektrumlarını bulmayı mümkün kılar.

4. YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI VE DALGA FONKSİYONLARI

Hafif yük taşıyıcılarının enerji spektrumunu elde etmek için aşağıdaki ilişkiden yararlanacağız:

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_{1,k}^{\pm} + \frac{\sqrt{3(l_0 + 3/2)(l_0 - 1/2)}}{2r} f_{2,k}^{\pm} = 0. \quad (4.1)$$

(4.1) denkleminde ve (3.20), (3.24)-(3.28) denklemlerinden yararlanarak $f_{0,k}^{\pm}, f_{4,k}^{\pm}, f_{5,k}^{\pm}, f_{6,k}^{\pm}, f_{7,k}^{\pm}, f_{8,k}^{\pm}$ fonksiyonlarını $f_{1,k}^{\pm}$ ve $f_{3,k}^{\pm}$ fonksiyonlarıyla ifade edelim:

$$f_{4,k}^{\pm} = -\frac{i\sqrt{2}d}{E - E_0} \frac{\alpha}{r} f_{3,k}^{\pm} + \frac{ic}{E - E_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2 \mp x}{r} \right) \right] f_{1,k}^{\mp}, \quad (4.2)$$

$$f_{5,k}^{\pm} = -\frac{i\sqrt{2}d}{E - E_0} \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{1 \pm x}{2r} \right) \right] f_{3,k}^{\pm} + \frac{id}{E - E_0} H_5^{\mp} f_{1,k}^{\mp}. \quad (4.3)$$

Burada,

$$H_5^{\mp} = -\frac{r}{2\alpha} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{5 \mp 3x}{2r} \frac{d}{dr} + \frac{(1 \mp 2x)(1 \pm x)}{2r^2} + \frac{2\alpha^2}{r^2} \right), \quad (4.4)$$

$$x = \ell_0 + \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

gösterimleri kabul edilmiştir. Daha sonra

$$f_{7,k}^{\pm} = \frac{4ie}{E - E_0 - \Delta_0} \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{2 \pm x}{r} \right) \right] f_{1,k}^{\mp}, \quad (4.6)$$

$$f_{8,k}^{\pm} = -\frac{\sqrt{6}ic}{E - E_0 - \Delta_0} \frac{r}{\alpha} \left(\frac{d^2}{dr^2} \mp \frac{x}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(3 \pm x)(1 \mp x)}{2r^2} + \frac{\alpha^2}{3r^2} \right) f_{1,k}^{\mp}, \quad (4.7)$$

$$f_{0,k}^{\pm} = \frac{ia}{2(E - E_g)} \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^{\mp} - \frac{i\sqrt{2}b}{E - E_g} \frac{r}{\alpha} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2 \mp x - x^2}{r^2} \right) f_{1,k}^{\pm} \quad (4.8)$$

ifadeleri (3.21) ve (3.28) denklemlerinde yazarsak

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{ba}{E(E - E_g)} + \frac{cd}{E(E - E_0)} \right) \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^{\mp} + \frac{r}{\alpha} \left[\left(\frac{2b^2}{(E - E_g)E} + \frac{6e^2}{(E - E_0 - \Delta_0)E} + \frac{c^2}{4(E - E_0)E} \right) \right] f_{1,k}^{\pm} = 0, \quad (4.9)$$

$$-\frac{\sqrt{2}r}{2\alpha} \left(\frac{ba}{(E - E_g)(E + \Delta)} + \frac{cd}{(E - E_0)(E + \Delta)} \right) \left[H_{11}^{\mp} \right] f_{1,k}^{\mp} + \left[\left(\frac{a^2}{4(E - E_g)(E + \Delta)} + \frac{2d^2}{(E - E_0)(E + \Delta)} \right) \right] f_{3,k}^{\pm} = 0 \quad (4.10)$$

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{x(x \pm 1)}{r^2} \right) + 1 \right]$$

denklemleri elde ederiz. Burada,

$$H_{11}^{\mp} = \frac{d^3}{dr^3} + \frac{6\mp x}{r} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{6\mp 3x - x^2}{r^2} \frac{d}{dr} \mp \frac{x(2\pm x - x^2)}{r^3} \quad (4.11)$$

işaretlenmiştir. (4.9) denklemine f operatörü aracılığıyla etki

edelim ve

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1\pm x}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1\mp x}{r} \right) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{x(x\pm 1)}{r^2} \right) \quad (4.12)$$

olduğunu dikkate alırsak (4.13) denklemini elde ederiz:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{ba}{E(E-E_g)} + \frac{cd}{E(E-E_0)} \right) \left[\left(\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{x(x\pm 1)}{r^2} \right) \right) \right] f_{3,k}^{\mp} + \\ & \left(\frac{d}{dr} + \frac{1\pm x}{r} \right) \left(\frac{r}{\alpha} \right) \times \\ & \left[\left(\frac{2b^2}{(E-E_g)E} + \frac{6e^2}{(E-E_0-\Delta_0)E} + \frac{c^2}{4(E-E_0)E} \right) \right] f_{1,k}^{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Yeni değişkenler kabul edelim:

$$A = \frac{a^2}{4(E-E_g)(E+\Delta)} + \frac{2d^2}{(E-E_0)(E+\Delta)}, \quad (4.14)$$

$$D = \frac{ba}{(E-E_g)(E+\Delta)} + \frac{cd}{(E-E_0)(E+\Delta)}, \quad (4.15)$$

$$D_1 = \frac{ba}{(E - E_g)E} + \frac{cd}{(E - E_0)E}, \quad (4.16)$$

$$S = \frac{2b^2}{(E - E_g)E} + \frac{6e^2}{(E - E_0 - \Delta_0)E} + \frac{c^2}{4(E - E_0)E}, \quad (4.17)$$

$$\hat{K}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2 \mp x - x^2}{r^2}. \quad (4.18)$$

Yukarıdaki değişkenlerden sonra (4.10) ve (4.13) denklemlerini

$$-\frac{\sqrt{2}r}{2\alpha} \frac{D}{A} [H_{11}^\mp] f_{1,k}^\mp + \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{x(x \pm 1)}{r^2} \right) + \frac{1}{A} \right] f_{3,k}^\pm = 0, \quad (4.19)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} (D_1) \left[\left(\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{x(x \pm 1)}{r^2} \right) \right) \right] f_{3,k}^\mp + \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \pm x}{r} \right) \left(\frac{r}{\alpha} \right) [(S)\hat{K}^2 + 1] f_{1,k}^\pm = 0.$$

şeklinde yazabiliriz. (4.19) denkleminde

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{x(x \pm 1)}{r^2} \right) \right] f_{3,k}^\mp \text{ ifadesini bulup (4.20) denklemine}$$

yazarsak (4.21) denklemini elde ederiz:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{D_1}{A} \right) f_{3,k}^\mp + \left\{ -\frac{1}{2} \frac{r}{\alpha} \frac{DD_1}{A} H_{11}^\pm + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \pm x}{r} \right) \left(\frac{r}{\alpha} \right) [(S)\hat{K}^2 + 1] \right\} f_{1,k}^\pm = 0 \quad (4.21)$$

(4.21) denkleminde $\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r}$ operatörü aracılığıyla etki edip (4.9)

denklemini dikkate alırsak:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{\alpha} \left(\frac{1}{A} \right) [(S)\hat{K}^2 + 1] + \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \left\{ -\frac{1}{2} \frac{r}{\alpha} \frac{DD_1}{A} H_{11}^{\pm} + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \pm x}{r} \right) \left(\frac{r}{\alpha} \right) [(S)\hat{K}^2 + 1] \right\} \end{array} \right\} f_{1,k}^{\pm} = 0 \quad (4.22)$$

denklemini elde ederiz. (4.23) ve (4.24) formüllerini dikkate alarak:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) (rH_{11}^{\pm}) = \left\{ \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \pm x}{r} \right) (r\hat{K}^2) \right\} =$$

$$r \left(\begin{array}{l} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{8}{r} \frac{d^3}{dr^3} + \frac{12 \mp 2x - 2x^2}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{4x(x \pm 1)}{r^3} \frac{d}{dr} \\ \mp \frac{x(2 \mp x - x^2)(1 \pm x)}{r^4} \end{array} \right) \quad (4.23)$$

ve

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) (r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \pm x}{r} \right) = r\hat{K}^2, \quad (4.24)$$

$$\hat{K}^4 = \frac{d^4}{dr^4} + \frac{8}{r} \frac{d^3}{dr^3} + \frac{12 \mp 2x - 2x^2}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{4x(x \pm 1)}{r^3} \frac{d}{dr}$$

$$\mp \frac{x(2 \mp x - x^2)(1 \pm x)}{r^4} \quad (4.25)$$

(4.22) denklemini (4.26) denklemi şeklinde yazabiliriz. Daha sonra

$$\left\{ \frac{r}{\alpha} \left(\frac{1}{A} \right) \left[(S) \hat{K}^2 + 1 \right] + \frac{r}{\alpha} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \frac{r}{\alpha} \frac{DD_1}{A} + S \right) \hat{K}^4 + \hat{K}^2 \right\} \right\} f_{1,k}^{\pm} = 0 \quad (4.26)$$

denklemin her iki tarafını $\frac{\alpha}{r} A$ ifadesiyle çarpalım:

$$\left[(S + A) \hat{K}^2 + \left(-\frac{1}{2} DD_1 + SA \right) \hat{K}^4 + 1 \right] f_{1,k}^{\pm} = 0 \quad (4.27)$$

bu denklem \hat{K}^2 'e göre bir yarım kare denklemdir. Bu denklemi:

$$\left(-\frac{1}{2} DD_1 + SA \right) (\hat{K}^2 - k_1) (\hat{K}^2 - k_2) f_{1,k}^{\pm} = 0 \quad (4.28)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$k_{1,2} = \frac{-(S + A) \pm \sqrt{(S + A)^2 - 4 \left(SA - \frac{1}{2} DD_1 \right)}}{2 \left(SA - \frac{1}{2} DD_1 \right)}. \quad (4.29)$$

\hat{K}^2 ifadesini dikkate alırsak

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2 \mp x - x^2}{r^2} + \frac{(S + A) + \sqrt{(S + A)^2 - 4 \left(SA - \frac{1}{2} DD_1 \right)}}{2 \left(SA - \frac{1}{2} DD_1 \right)} \right) f_{1,k}^{\pm}(r) = 0 \quad (4.30)$$

denklemin çözümü, Bessel fonksiyonu ile ifade edilir (Гельфанд vd. 1958; Любарский 1957)

$$f_{1,k}^{\pm} = C_1^{\pm} \frac{I_{l_0+1/2 \pm 1/2}(kr)}{r^{3/2}}. \quad (4.31)$$

Yukarıdaki ifadede

$$k^2 = \frac{(S+A) + \sqrt{(S+A)^2 - 4\left(SA - \frac{1}{2}DD_1\right)}}{2\left(SA - \frac{1}{2}DD_1\right)} \quad (4.32)$$

işaretlenmiştir. (4.32) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$2\left(SA - \frac{1}{2}DD_1\right)k^2 - (S+A) = \sqrt{(S+A)^2 - 4\left(SA - \frac{1}{2}DD_1\right)}. \quad (4.33)$$

Bu denklemin her iki tarafını da karesini alıp sadeleştirirsek (4.34) denklemini elde ederiz:

$$\left(SA - \frac{1}{2}DD_1\right)k^4 - (S+A)k^2 + 1 = 0. \quad (4.34)$$

(4.34) denkleminde S, A, D, Δ ifadelerini yerine yazarsak

$$\left[1 - \frac{a^2k^2}{4(E+\Delta)(E-E_g)} - \frac{2d^2k^2}{(E+\Delta)(E-E_0)}\right] \left[1 - \frac{6e^2k^2}{E(E-E_0-\Delta)}\right] + \frac{(ac/4 - 2bd)^2k^4}{E(E-E_g)(E+\Delta)(E-E_0)} - \frac{2b^2k^2}{E(E-E_g)} - \frac{c^2k^2}{4E(E-E_0)} = 0 \quad (4.35)$$

denklemini elde ederiz. (4.35) denklemi, hacim durumundaki elektronların, hafif ve spin-yörünge ayrılmış deliklerin enerji spektrumlarını ifade eden bir denklemdir. (4.30) denklemini dikkate alarak (4.8) ve (4.9) denklemlerini yeniden yazalım:

$$f_{0,k}^{\pm} = \frac{ia}{2(E-E_g)} \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^{\mp} + \frac{i\sqrt{2}b}{E-E_g} \frac{r}{\alpha} k^2 f_{1,k}^{\pm}, \quad (4.36)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} D_1 \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^{\mp} + \frac{r}{\alpha} [-Sk^2 + 1] f_{1,k}^{\pm} = 0. \quad (4.37)$$

(4.37) denkleminde $\left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^{\mp}$ ifadesini bulalım:

$$\left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^{\mp} = \frac{2}{\sqrt{2}D_1} \frac{r}{\alpha} [-Sk^2 + 1] f_{1,k}^{\pm}. \quad (4.38)$$

(4.38) denklemini (4.36) denkleminde dikkate alırsak:

$$f_{0,k}^{\pm} = \frac{ia}{2(E-E_g)} \frac{2}{\sqrt{2}D_1} \frac{r}{\alpha} [-Sk^2 + 1] f_{1,k}^{\pm} + \frac{i\sqrt{2}b}{E-E_g} \frac{r}{\alpha} k^2 f_{1,k}^{\pm}. \quad (4.39)$$

Bu denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f_{0,k}^{\pm} = \frac{i}{(E-E_g)} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r}{\alpha} \left(\left[\frac{-aSk^2 + a}{D_1} \right] + 2bk^2 \right) f_{1,k}^{\pm}. \quad (4.40)$$

Bu denklemde S ve D_1 ifadelerini yazarsak $f_{0,k}^{\pm}$ için

$$f_0^{\pm}(kr) = \frac{a\sqrt{2}riE}{2\alpha(E-E_g)} \frac{\left[1 - \frac{6e^2k^2}{E(E-E_0-\Delta)}\right] + \left[\frac{2bcd}{a} - \frac{c^2}{2}\right] \frac{k^2}{E(E-E_0)}}{\left[\frac{cd}{E-E_0} + \frac{ab}{E-E_g}\right]} f_1^{\pm}(kr) \quad (4.41)$$

ifadesini elde ederiz. Hafif yük taşıyıcıları için diğer fonksiyonların ifadelerini yazalım:

$$f_{2,k}^{\pm} = -\frac{r}{\alpha} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{2r} \right) f_1^{\pm}(kr), \quad (4.42)$$

$$f_{4,k}^{\pm} = C_4^{\pm} \frac{I_{l_0+1/2\pm 1/2}(kr)}{r^{3/2}}, \quad (4.43)$$

$$f_{0,k}^{\pm} = C_0^{\pm} \frac{I_{l_0+1/2\pm 1/2}(kr)}{r^{1/2}}, \quad (4.44)$$

$$f_{3,k}^{\pm} = C_3^{\pm} \frac{I_{l_0+1/2\pm 1/2}(kr)}{r^{1/2}}. \quad (4.45)$$

(4.37) denkleminde f_1^{\pm} 'i bulalım

$$f_{1,k}^{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\alpha}{r} \frac{D_1}{1-Sk^2} \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^{\mp}. \quad (4.46)$$

Bu ifadeyi (4.40) denklemine yazarak f_0^\pm ve f_3^\mp arasındaki ilişkiyi veren denklemi elde ederiz:

$$f_{0,k}^\pm = \left[\frac{ia}{2(E - E_g)} + \frac{ib}{E - E_g} \frac{D_1 k^2}{1 - Sk^2} \right] \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1 \mp x}{r} \right) \right] f_{3,k}^\mp. \quad (4.47)$$

Bessel fonksiyonları için aşağıdaki tekrarlamalı ilişkiler vardır (Любарский 1957):

$$Z_{p-1}(z) = \frac{p}{z} Z_p(z) + \frac{dZ_p(z)}{dz}, \quad (4.48)$$

$$Z_{p+1}(z) = \frac{p}{z} Z_p(z) - \frac{dZ_p(z)}{dz}. \quad (4.49)$$

Burada, $Z_p(z)$ Bessel fonksiyonudur. (4.48) ve (4.49) formüllerinden diğer iki ilişki bulunur:

$$Z_{p-1}(z) = \frac{p}{z} Z_p(z) + \frac{dZ_p(z)}{dz}, \quad (4.50)$$

$$Z_{p+1}(z) = \frac{p}{z} Z_p(z) - \frac{dZ_p(z)}{dz}. \quad (4.51)$$

(4.44) ve (4.45) denklemlerinden f_0^\pm ve f_3^\mp için ifadeleri (4.47) denklemine yazıp ve Bessel fonksiyonları için yukarıda yazılan rekürans ilişkilerden faydalanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$C_0^\pm = \mp k \left[\frac{ia}{2(E - E_g)} + \frac{ib}{E - E_g} \frac{D_1 k^2}{1 - Sk^2} \right] C_3^\mp. \quad (4.52)$$

Bu denklemden C_3^\pm katsayısını bulalım:

$$C_3^\pm = \mp \frac{2i(E - E_g)}{ka} \frac{1 - Sk^2}{1 - Sk^2 + \frac{2b}{a} D_1 k^2} C_0^\mp. \quad (4.53)$$

Yukarıdaki ifadede S ve D_1 ifadelerini yazarsak (4.54) ifadesini elde ederiz.

$$C_3^\pm = \mp \frac{2i(E - E_g)}{ak} \frac{1 - \frac{k^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right]}{1 - \frac{6e^2 k^2}{E(E - E_0 - \Delta)} + \left(\frac{2bcd}{a} - \frac{c^2}{4} \right) \frac{k^2}{E(E - E_0)}} C_0^\mp. \quad (4.54)$$

Ağır deliklerin enerji spektrumunu elde etmek için denklemler sisteminde:

$$f_0^\pm = f_3^\mp = 0 \quad (4.55)$$

koşulu kabul edilmelidir. (3.20) denklemden f_1 ve f_2 için, (3.23) denklemden ise f_4 ve f_5 için (4.56) ve (4.57) ilişkilerini elde ederiz:

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{5 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_{2,k_n}^\pm + \frac{\sqrt{3(l_0 + 3/2)(l_0 - 1/2)}}{2r} f_{1,k_n}^\pm = 0, \quad (4.56)$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{5 \pm (l_0 + 1/2)}{2r} \right] f_5^\pm + \frac{\alpha}{r} f_4^\pm = 0. \quad (4.57)$$

(4.66) denklemini (3.25) denkleminde dikkate alırsak

$$-\frac{ic}{E-E_0} \frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2\mp x}{2r} \right) f_2^\mp + f_5^\pm = 0 \quad (4.58)$$

(4.58) denklemini elde ederiz. (4.56) ve (4.57) denklemlerini kullanarak (3.27) ve (3.28) denklemlerinden yararlanarak:

$$f_7^\pm = -\frac{2r}{\alpha} \frac{ie}{E-E_0-\Delta_0} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4\pm x}{2r} - \frac{15\pm 3x}{4r^2} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) f_2^\pm, \quad (4.59)$$

$$f_8^\pm = \frac{\sqrt{6}ie}{E-E_0-\Delta_0} \frac{4}{3} \left(\frac{d}{dr} - \frac{2\pm x}{4r} \right) f_2^\pm \quad (4.60)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu ifadeleri (3.22) denkleminde yazıp ve (4.57) denkleminde faydalanırsak, f_5^\mp ve f_2^\pm fonksiyonları için (4.61) denklemini elde ederiz:

$$-\frac{ic}{E} \frac{3}{2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2\mp x}{2r} \right) f_5^\mp + \frac{4e^2}{E(E-E_0-\Delta_0)} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2-x^2\mp x}{r^2} + \frac{E(E-E_0-\Delta_0)}{4e^2} \right) f_2^\pm = 0. \quad (4.61)$$

(4.58) denkleminde f_5^\mp belirleyip (4.61) denkleminde yerine yazarsak, f_2^\pm için:

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2-x^2\mp x}{r^2} \right) \left(\frac{4e^2}{E(E-E_0-\Delta_0)} + \frac{9}{4} \frac{c^2}{E(E-E_0)} \right) + 1 \right] f_2^\pm = 0. \quad (4.62)$$

Aşağıdaki gösterimi kabul ederek

$$k_h^2 = \left(\frac{4e^2}{E(E-E_0-\Delta_0)} + \frac{9}{4} \frac{c^2}{E(E-E_0)} \right)^{-1} \quad (4.63)$$

(4.62) denklemini yeniden yazalım

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2 - x^2 \mp x}{r^2} + k_h^2 \right) f_2^\pm = 0 \quad (4.64)$$

Bu denklemin çözümü:

$$f_{2,kh}^\pm = C_{2h}^\pm \frac{I_{l_0+1/2\pm 1/2}(k_h r)}{r^{3/2}} \quad (4.65)$$

Bessel fonksiyonu ile ifade edilir. (4.63) denklemi, hacim durumundaki yarı iletkenlerde ağır deliklerin enerji spektrumlarını belirler. Söz konusu denklemi

$$1 - \frac{9}{4} \frac{c^2 k_h^2}{E(E - E_0)} - \frac{4e^2 k_h^2}{E(E - E_0 - \Delta)} = 0 \quad (4.66)$$

gibi yazabiliriz. Ağır delikler için diğer fonksiyonların ifadeleri aşağıdaki gibidir

$$f_{1,kh}^\pm = -\frac{r}{\alpha} \left(\frac{d}{dr} + \frac{5 \mp x}{2r} \right) f_2^\pm(k_h r), \quad (4.67)$$

$$f_{5,kh}^\pm = C_{5h}^\pm \frac{I_{l_0+1/2\pm 1/2}(k_h r)}{r^{3/2}}, \quad (4.68)$$

$$f_{0,kh}^\pm = C_0^\pm \frac{I_{l_0+1/2\pm 1/2}(k_h r)}{r^{1/2}}, \quad (4.69)$$

$$f_{4,kh}^\pm = -\frac{r}{\alpha} \left(\frac{d}{dr} + \frac{5 \mp x}{2r} \right) f_5^\pm(k_h r) \quad (4.70)$$

burada, a, b, c, d, e parametreleri efektif kütle ile ifade edilebilir. (4.35) ve (4.66) denklemlerinde $k = 0$ ve $k_h = 0$ olduğu durumda enerjinin aldığı değerler

$$\begin{aligned} E_n &= E_g, \\ E_{hh} &= 0, \\ E_{lh} &= 0, \\ E_{sh} &= -\Delta. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Bu değerler sırasıyla iletkenlik, ağır delikler, hafif delikler ve spin-yörünge ayrılmış bölgelere karşılık gelmektedir. (4.35) ve (4.66) denklemlerini küçük k 'lar için çözersek, efektif kütleler ile a, b, c, d, e parametreleri arasındaki

$$\frac{\hbar^2}{2m_n} = \frac{2b^2}{E_g} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{E_g + \Delta}, \quad (4.72)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_{hh}} = \frac{9c^2}{4E_0} + \frac{4e^2}{E_0 + \Delta}, \quad (4.73)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_{lh}} = \frac{2b^2}{E_g} + \frac{c^2}{4E_0} + \frac{6e^2}{E_0 + \Delta}, \quad (4.74)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_{sh}} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{E_g + \Delta} + \frac{2d^2}{E_0 + \Delta} \quad (4.75)$$

ilişkilerini buluruz. Burada, $m_n, m_{hh}, m_{lh}, m_{sh}$ sırasıyla elektronların, ağır, hafif ve spin-yörünge ayrılmış deliklerin efektif kütleleridir. (4.72)-(4.75) denklem sisteminde bilinmeyen 5 parametre a, b, c, d, e bulunmaktadır. Bu parametreleri tek değerli belirlemek için $\frac{e}{c} = \frac{3}{2}$ koşulunu kabul edelim. Bu koşul

$(3/2; 1)$ bölgesi ile yukarıda yer alan iletkenlik bölgesinin $(5/2; 2)$ yozlaşma dereceleri oranıdır. Eğer $a = 2b$, $e = \frac{3c}{2}$ ve $d = \frac{5c}{2}$ olarak değiştirirsek, (Sercel vd. 1999) numaralı çalışmadaki denklemleri elde ederiz.

5.KÜRESEL KUANTUM NOKTALARINDA YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Kuantum noktalarının sınırında potansiyel sonsuz büyük olduğundan, radyal fonksiyonlar kuantum noktalarının sınırında

$$G_1^\pm f_1^\pm(k_1 r) + G_2^\pm f_1^\pm(k_2 r) + G_3^\pm f_1^\pm(k_h r) = 0, \quad (5.1)$$

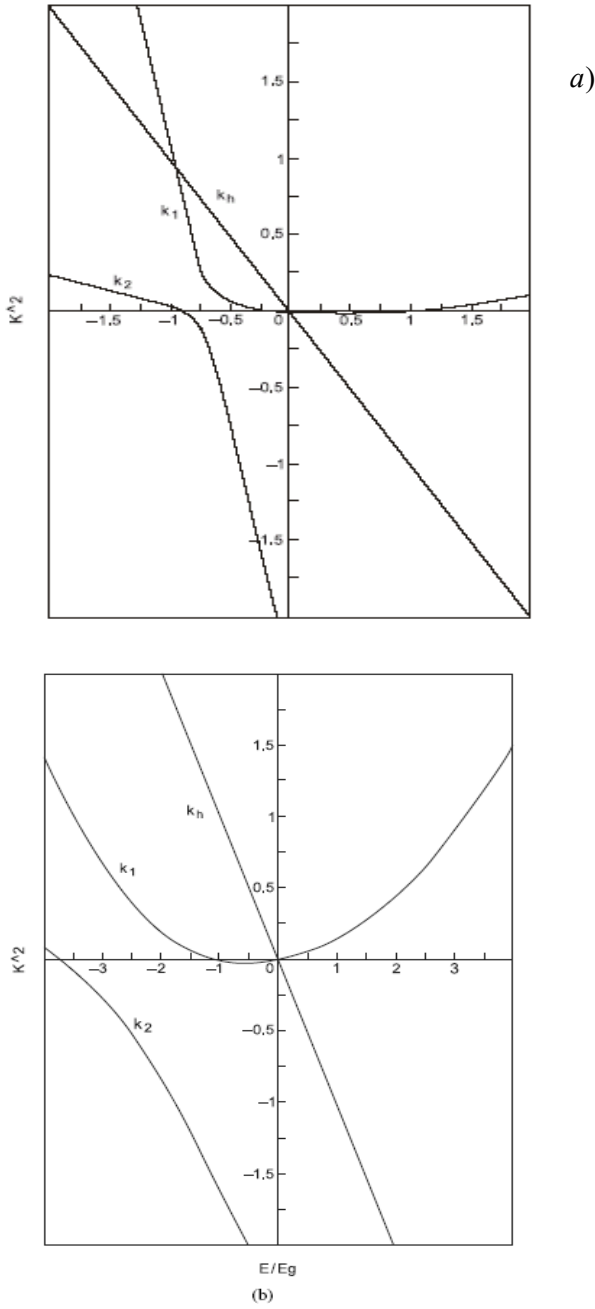
$$G_1^\pm f_2^\pm(k_1 r) + G_2^\pm f_2^\pm(k_2 r) + G_3^\pm f_2^\pm(k_h r) = 0, \quad (5.2)$$

$$G_1^\pm f_3^\pm(k_1 r) + G_2^\pm f_3^\pm(k_2 r) = 0 \quad (5.3)$$

sınır koşullarını sağlamalıdır. Burada, $k_{1,2}$ (4.35) yarım kare denkleminin çözümüdür. Şekil 5.1'te $k_{1,2}$ 'nin enerjiye bağımlılığı InAs ve HgTe yarı iletkenleri için gösterilmiştir.

Kuantum noktalarında yük taşıyıcılarının enerji spektrumları, (5.1)-(5.3) denklemler sisteminin determinantının sıfıra eşit olması koşulundan bulunur. Bessel fonksiyonları için tekrarlama ilişkileri kullanarak (5.1)-(5.3) denklemlerinde yer alan silindirik Bessel fonksiyonlarını, farklı indeksli küresel Bessel fonksiyonları ile ifade edelim. Küresel Bessel fonksiyonları ile silindirik Bessel fonksiyonları arasındaki (5.4) ilişkisinden faydalanalım (Любарский 1957):

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{\ell+\frac{1}{2}}(x). \quad (5.4)$$



Şekil 5.1. (4.35) bikvadrat denkleminin çözümünün enerjiye bağlılığı InAs (a) ve HgTe (b) için

Böylece:

$$f_{1,k}^{\pm} = \frac{k_1^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[j_{l_0+1\pm 1/2}(k_1 r) + j_{l_0-1\pm 1/2}(k_1 r) \right], \quad (5.5)$$

$$f_{1,k_h}^{\pm} = -\frac{k_h^{3/2}}{4\sqrt{\pi}\alpha} \frac{\sqrt{2}}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} &(2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{l_0+1\pm 1/2}(k_h r) + \\ &(2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{l_0-1\pm 1/2}(k_h r) \end{aligned} \right], \quad (5.6)$$

$$f_{2,k_1}^{\pm} = \frac{k_1^{3/2}}{4\sqrt{\pi}\alpha} \frac{\sqrt{2}}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} &(2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{l_0+1\pm 1/2}(k_1 r) + \\ &+(2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{l_0-1\pm 1/2}(k_1 r) \end{aligned} \right] \quad (5.7)$$

(4.41) ve (4.53) formüllerini kullanarak $f_3^{\mp}(kr)$ için

$$\begin{aligned} f_3^{\mp}(kr) &= C_3^{\mp} \frac{I_{\ell_0 + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{2i(E - E_g)}{ak} \\ &\frac{1 - \frac{k^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right]}{1 - \frac{6e^2 k^2}{E(E - E_0 - \Delta)} + \left(\frac{2bcd}{a} - \frac{c^2}{4} \right) \frac{k^2}{E(E - E_0)}} \\ &\frac{\sqrt{2}riE}{\alpha(E - E_g)} \frac{\frac{a}{2} \left[1 - \frac{6e^2 k^2}{E(E - E_0 - \Delta)} \right] + \left[bcd - \frac{ac^2}{8} \right] \frac{k^2}{E(E - E_0)}}{\left[\frac{cd}{E - E_0} + \frac{ab}{E - E_g} \right]} \frac{I_{\ell_0 + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$f_3^\mp(kr) = \mp \frac{2E}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{\pi k}} \frac{1 - \frac{k^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right]}{\left[\frac{cd}{E - E_0} + \frac{ab}{E - E_g} \right]} j_{\ell_0 \mp 1/2}(kr) \quad (5.9)$$

ifadesini buluruz. Yukarıda yazılan formülleri kullanarak (5.1)-(5.3) denklem sistemini

$$G_1^\pm \frac{k_1^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_1 r) + j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_1 r) \right] + G_2^\pm \frac{k_2^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_2 r) + j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_2 r) \right] - \quad (5.10)$$

$$- \frac{G_3^\pm}{2\alpha} \frac{k_h^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} & (2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_h r) + \\ & (2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_h r) \end{aligned} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{G_1^\pm}{2\alpha} \frac{k_1^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} & (2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_1 r) + \\ & + (2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_1 r) \end{aligned} \right] + \\ & + \frac{G_2^\pm}{2\alpha} \frac{k_2^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} & (2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_2 r) + \\ & + (2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_2 r) \end{aligned} \right] + \quad (5.11) \\ & + G_3^\pm \frac{k_h^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \left[j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_h r) + j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_h r) \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\mp \frac{2E}{\alpha} G_1^\pm \sqrt{\frac{1}{\pi k_1}} \frac{1 - \frac{k_1^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right]}{\left[\frac{cd}{E - E_0} + \frac{ab}{E - E_g} \right]} j_{\ell_0 \mp 1/2}(k_1 r) + \quad (5.12)$$

$$\mp \frac{2E}{\alpha} G_2^\pm \sqrt{\frac{1}{\pi k_2}} \frac{1 - \frac{k_2^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right]}{\left[\frac{cd}{E - E_0} + \frac{ab}{E - E_g} \right]} j_{\ell_0 \mp 1/2}(k_2 r) = 0$$

gibi yazabiliriz. (5.10) ve (5.11) denklemlerinin her iki tarafını

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}$ ifadesine, (5.12) denkleminin her iki tarafını ise

$$\mp \frac{2E}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{\left[\frac{cd}{E - E_0} + \frac{ab}{E - E_g} \right]} \text{ ifadesine bölelim ve } G_1^\pm k_1^{3/2} = A_1^\pm,$$

$G_2^\pm k_2^{3/2} = A_2^\pm$, $G_3^\pm k_h^{3/2} = A_3^\pm$ olarak işaretleyelim. Bu durumda (5.10)-

(5.12) denklem sistemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$A_1^\pm \left[j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_1 r) + j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_1 r) \right] +$$

$$A_2^\pm \left[j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_2 r) + j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_2 r) \right] -$$

$$- \frac{A_3^\pm}{2\alpha} \left[\begin{array}{l} (2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{\ell_0 + 1 \pm 1/2}(k_h r) + \\ (2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{\ell_0 - 1 \pm 1/2}(k_h r) \end{array} \right] = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{A_1^\pm}{2\alpha} \left[(2\pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{l_0+1\pm 1/2}(k_1 r) + (2\mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{l_0-1\pm 1/2}(k_1 r) \right] + \frac{A_2^\pm}{2\alpha} \left[(2\pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0 \right) j_{l_0+1\pm 1/2}(k_2 r) + (2\mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0 \right) j_{l_0-1\pm 1/2}(k_2 r) \right] + A_3^\pm [j_{l_0+1\pm 1/2}(k_h r) + j_{l_0-1\pm 1/2}(k_h r)] = 0, \quad (5.14)$$

$$A_1^\pm \frac{1}{k_1^2} \left(1 - \frac{k_1^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E-E_0-\Delta} + \frac{c^2/4}{E-E_0} + \frac{2b^2}{E-E_g} \right] \right) j_{l_0\mp 1/2}(k_1 r) + A_2^\pm \frac{1}{k_2^2} \left(1 - \frac{k_2^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E-E_0-\Delta} + \frac{c^2/4}{E-E_0} + \frac{2b^2}{E-E_g} \right] \right) j_{l_0\mp 1/2}(k_2 r) = 0. \quad (5.15)$$

(5.15) denklemindeki ilk terimden

$$-\frac{k_1^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E-E_0-\Delta} + \frac{c^2/4}{E-E_0} + \frac{2b^2}{E-E_g} \right] \text{ ifadesini, ikinci terimden ise}$$

$$-\frac{k_2^2}{E} \left[\frac{6e^2}{E-E_0-\Delta} + \frac{c^2/4}{E-E_0} + \frac{2b^2}{E-E_g} \right] \text{ ifadesini parantez dışına alıp}$$

$$\text{denklemin her iki tarafını } -\frac{1}{E} \left[\frac{6e^2}{E-E_0-\Delta} + \frac{c^2/4}{E-E_0} + \frac{2b^2}{E-E_g} \right]$$

ifadesine bölersek (5.16) denklemini elde ederiz:

$$A_1^\pm \left(1 - \frac{E}{k_1^2} \left[\frac{6e^2}{E-E_0-\Delta} + \frac{c^2/4}{E-E_0} + \frac{2b^2}{E-E_g} \right] \right)^{-1} j_{l_0\mp 1/2}(k_1 r) + A_2^\pm \left(1 - \frac{E}{k_2^2} \left[\frac{6e^2}{E-E_0-\Delta} + \frac{c^2/4}{E-E_0} + \frac{2b^2}{E-E_g} \right] \right)^{-1} j_{l_0\mp 1/2}(k_2 r) = 0. \quad (5.16)$$

Denklemler sistemini yeniden yazarsak:

$$\begin{aligned}
 & A_1^\pm [j_{l_0+1\pm 1/2}(k_1 r) + j_{l_0-1\pm 1/2}(k_1 r)] + \\
 & A_2^\pm [j_{l_0+1\pm 1/2}(k_2 r) + j_{l_0-1\pm 1/2}(k_2 r)] - \\
 & - \frac{A_3^\pm}{\sqrt{3\left(\ell_0 + \frac{3}{2}\right)\left(\ell_0 + \frac{3}{2}\right)}} \left[\begin{aligned} & (2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0\right) j_{l_0+1\pm 1/2}(k_h r) + \\ & (2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0\right) j_{l_0-1\pm 1/2}(k_h r) \end{aligned} \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_1^\pm}{\sqrt{3\left(\ell_0 + \frac{3}{2}\right)\left(\ell_0 + \frac{3}{2}\right)}} \left[\begin{aligned} & (2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0\right) j_{l_0+1\pm 1/2}(k_1 r) + \\ & + (2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0\right) j_{l_0-1\pm 1/2}(k_1 r) \end{aligned} \right] + \\
 & \frac{A_2^\pm}{\sqrt{3\left(\ell_0 + \frac{3}{2}\right)\left(\ell_0 + \frac{3}{2}\right)}} \left[\begin{aligned} & (2 \pm 1) \left(\frac{3}{2} + l_0\right) j_{l_0+1\pm 1/2}(k_2 r) + \\ & + (2 \mp 1) \left(\frac{1}{2} - l_0\right) j_{l_0-1\pm 1/2}(k_2 r) \end{aligned} \right] + \\
 & + A_3^\pm [j_{l_0+1\pm 1/2}(k_h r) + j_{l_0-1\pm 1/2}(k_h r)] = 0,
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
 & A_1^\pm \left(1 - \frac{E}{k_1^2} \left[\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right]^{-1} \right) j_{\ell_0 \mp 1/2}(k_1 r) + \\
 & A_2^\pm \left(1 - \frac{E}{k_2^2} \left[\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right]^{-1} \right) j_{\ell_0 \mp 1/2}(k_2 r) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

(5.17)-(5.19) denklem sistemi (Григорян vd. 1990) numaralı referanstaki (9) numaralı denklem sistemine benzer. Ancak, bizim elde ettiğimiz denklem sistemi elektronların ve hafif deliklerin enerji spektrumlarının parabolik olmamasını dikkate almamıza olanak tanır. Buna ek olarak, elektronların ve spin-yörünge

ayrılmış deliklerin enerji spektrumlarını belirleyen ek bir parametre dahil edilmiştir.

Bizim radyal fonksiyonlarımız, (Григорян vd. 1990) numaralı referansta tanımlanan R_{h1}^{\mp} ve R_{h2}^{\mp} radyal fonksiyonlarının doğrusal kombinasyonudur.

Boyuta göre kuantumlanan enerji seviyeleri, (5.17), (5.18) ve (5.19) denklem sisteminin katsayılarından oluşturulan matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen (5.20) dispersiyon denkleminde bulunur:

$$\left[1 - \frac{E}{k_1^2} \left(\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right) \right]^{-1} j_{l_0 \mp 1/2}(k_1 r) \times$$

$$\left[\frac{2 \mp 1}{2 \pm 1} \frac{l_0 - 1/2}{l_0 + 3/2} j_{l_0 + 1 \pm 1/2}(k_h r) j_{l_0 - 1 \pm 1/2}(k_2 r) + \right.$$

$$\left. + j_{l_0 + 1 \pm 1/2}(k_2 r) j_{l_0 - 1 \pm 1/2}(k_h r) \right] - \quad (5.20)$$

$$\left[1 - \frac{E}{k_2^2} \left(\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right) \right]^{-1} j_{l_0 \mp 1/2}(k_2 r) \times$$

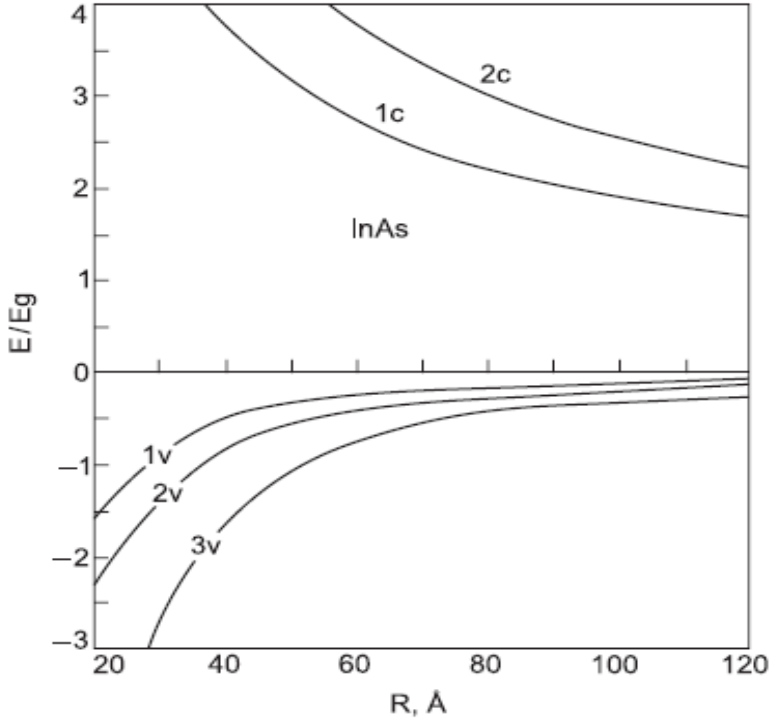
$$\left[\frac{2 \mp 1}{2 \pm 1} \frac{l_0 - 1/2}{l_0 + 3/2} j_{l_0 + 1 \pm 1/2}(k_h r) j_{l_0 - 1 \pm 1/2}(k_1 r) + \right.$$

$$\left. + j_{l_0 + 1 \pm 1/2}(k_1 r) j_{l_0 - 1 \pm 1/2}(k_h r) \right] = 0.$$

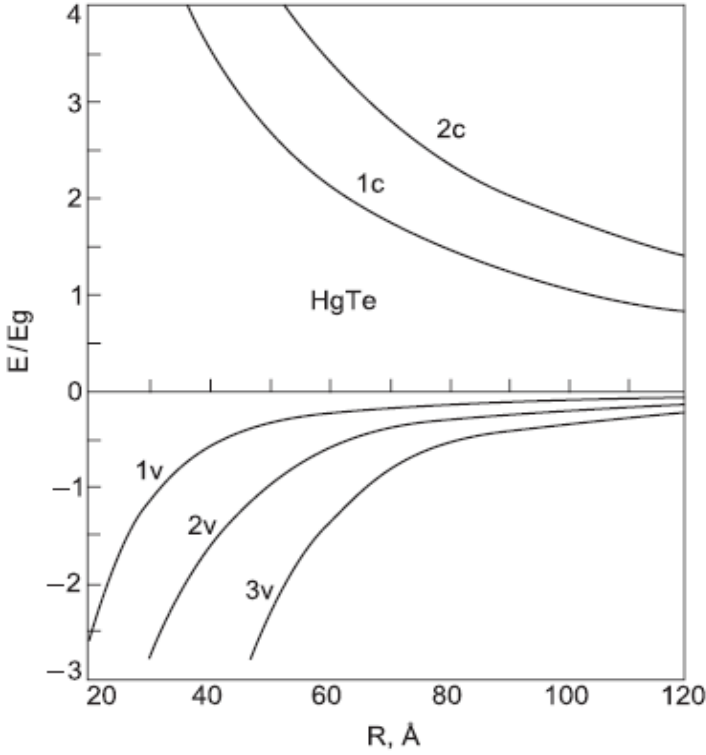
(5.20) denklemindeki üst indeks çift durumlara, alt indeks ise tek durumlara karşılık gelir. (5.20) denklemi, yasak bandı dar olan InAs tipi ve ters (invers) banda sahip HgTe tipi yarı iletkenlerden yapılmış küresel kuantum noktalarındaki yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını bulmaya olanak sağlar.

(1.5) ve (1.6) numaralı şekillerde InAs (a) ve HgTe (b) yarı iletken kuantum noktalarında yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarının kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı gösterilmiştir. InAs için aşağıdaki bant parametreleri kullanılmıştır: $E_g = 0.42eV$, $\Delta = 0.38eV$, $m_c = 0.023m_0$,

$m_{hh} = 0.4m_0$, $m_{lh} = 0.025m_0$, $m_{sh} = 0.15m_0$ HgTe için $E_g = 0.28eV$,
 $\Delta = 1.05eV$, $m_c = 0.03m_0$, $m_{hh} = 0.44m_0$, $m_{lh} = 0.032m_0$,
 $m_{sh} = 0.15m_0$.



Şekil 5.2. InAs kuantum noktalarında düşük enerji seviyelerinin kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı



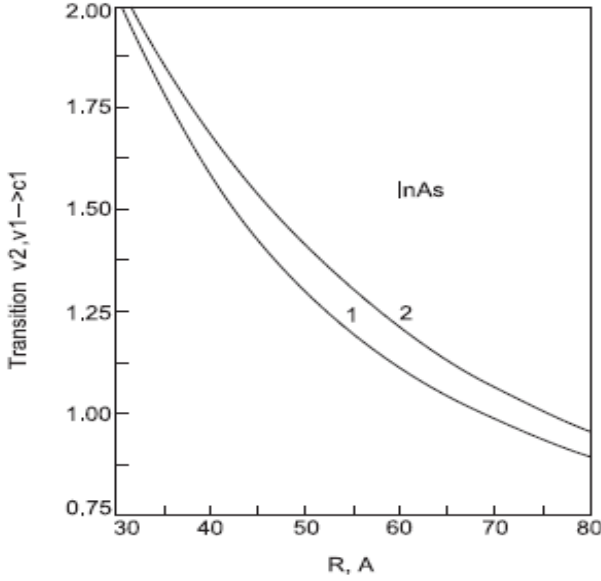
Şekil 5.3. HgTe kuantum noktalarında en düşük enerji seviyelerinin kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı

Şekil 5.3'de değerlik bandının temel halinden iletkenlik bandına geçiş enerjilerinin kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı gösterilmiştir. Gelfand'a göre küresel koordinatlarda diferansiyel denklemler sisteminin çözümü

$$\Psi_{l_0}^r = f_{lmr}^{l_0}(\tau) T_{mn}^{l_0} \left(\frac{\pi}{2} - \phi, \theta, 0 \right) \quad (5.21)$$

kimidir. Burada, T - genelleştirilmiş küresel fonksiyondur. $l_0 \geq l$, $-l_0 \leq m$ ve $n \leq l_0$. $l_0 = 1/2$ durumları için $f_1^\pm, f_4^\pm, f_5^\pm$ fonksiyonları, ($m = \pm 3/2$), genel dalga fonksiyonlarına ek bir katkı vermez. Bu nedenle, bu durumda ağır deliklerin spektrumu

elde edilmez. Elektronların, hafif ve spin-yörünge ayrılmış deliklerin enerji spektrumları (5.22) denkleminde bulunur:



Şekil 5.4. Değerlik bandının temel halinden iletkenlik bandına geçiş enerjilerinin kuantum noktalarının yarıçapına bağlılığı

$$\begin{aligned}
 & j_{3/2\pm 1/2}(k_1 r) j_{1/2\mp 1/2}(k_2 r) \cdot \\
 & \left[1 - \frac{E}{k_1^2} \left(\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right)^{-1} \right] - \\
 & j_{3/2\pm 1/2}(k_2 r) j_{1/2\mp 1/2}(k_1 r) \cdot \\
 & \left[1 - \frac{E}{k_2^2} \left(\frac{6e^2}{E - E_0 - \Delta} + \frac{c^2/4}{E - E_0} + \frac{2b^2}{E - E_g} \right)^{-1} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Belirtmek gerekir ki, kuantum noktalarında yük taşıyıcılarının enerji spektrumları için bulunan (5.22) ifadesi, HgTe tipi yarı metallere ve $\text{Cd}_{1-x}\text{Hg}_x\text{Te}$ tipi katı çözeltilerden hazırlanmış kuantum noktaları için de geçerlidir.

6.KANE TİPİ YARI İLETKEN KUANTUM TELLERİNDE YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Son zamanlarda, kuantum kuyuları, kuantum telleri ve kuantum noktaları gibi kuantum nanoyapıların optik özellikleri hakkında birçok araştırma yapılmıştır (Bimberg, Grundmann, ve Ledentsov 1999; Алферов 2006; Леденцов vd. 1998). Dış bir homojen manyetik alanın uygulanması, bu sistemler hakkında daha fazla bilgi edinmemizi sağlar. Kuantum noktalarındaki ve kuantum tellerindeki yük taşıyıcılarının enerji spektrumları (Chuu ve Wang 1994; Masale, Constantinou, ve Tilley 1992) çalışmalarında hesaplanmıştır. Dış homojen manyetik alanın kuantum çubuğunun eksenini boyunca yönlendirildiği durumda, elektronların enerji spektrumları (Masale vd. 1992) çalışmasında hesaplanmıştır. Bu çalışmada serbest elektron modeli kullanılmıştır. Enerji spektrumlarının manyetik alana bağımlılığında, manyetik kuantum sayısının (m) negatif değerlerinde bir minimuma sahip olduğu bulunmuştur. (Chuu ve Wang 1994) numaralı çalışmada, manyetik alanın olduğu ve olmadığı durumlarda, sonsuz potansiyele sahip kuantum tellerindeki elektronların enerji spektrumları etkin kütle yaklaşımı kullanılarak hesaplanmıştır.

Gerçek bölge yapısı dikkate alınarak, InSb tipi yarı iletken kuantum noktalarının magneto-optik özellikleri, sonsuz potansiyel durumunda (Zawadzki ve Kubisa 1993) çalışmasında incelenmiştir. Serbest elektronların spin-parçalanma faktörü olan Lande faktörü ($g=2$), $1/2$ elektron durumlarının dış manyetik alanla etkileşimini karakterize eder. Katı cisimlerde, elektron durumlarının kristal potansiyeli ile etkileşimi, elektronların etkin g -faktörü değerini kökten değiştirir. Farklı kristallerde spin-parçalanma sabiti çok büyük pozitif değerler ve çok küçük negatif değerler olabilir (örneğin, geniş yasak bölgeli yarı iletkenlerde

$g = 2$, GaAs için $g = -0.44$, InSb için $g = -50$). Bu değerler, ikinci mertebeden uyarılma teorisi yardımıyla elde edilen Roth'un formülü ile uyumludur (Roth, Lax, ve Zwerdling 1959). Nanokristallerde elektron durumlarının kafes potansiyeli ile etkileşimi sonucunda elektronların etkin g -faktöründeki değişim, (Ivchenko 2005; Ivchenko, Kiselev, ve Willander 1997; Kiselev, Ivchenko, ve Rössler 1998; Kiselev vd. 1998; Воробьев vd. 2001; Ивченко ve Киселев 1992) çalışmalarıyla ele alınmıştır.

İvchenko (Ивченко ve Киселев 1992), etkin g -faktörü teorisini süper kafeslere ve kuantum kuyularına uygulayarak etkin g -faktörünün tabakanın genişliğine bağlı olduğunu ve elektronlar için Zeeman etkisinin güçlü bir anizotropi sergilediğini bulmuştur. Kübik simetriye sahip yarı iletkenlerde (A_3B_5 ve A_2B_6) yapılan deneyler, bu teorik çalışmanın sonuçlarını doğrulamıştır (Hannak vd. 1995; Kiselev vd. 1998; Sirenko vd. 1997, 1998). Kuantum noktalarında g -faktörünün ölçümüne dair ilk deneyler yapılmaya başlanmıştır (Sirenko vd. 1997).

Kuantum noktalarındaki ve kuantum silindirlerindeki spin-yörünge etkileşimi ve bunun elektronların etkin g -faktörüne etkisi (Ivchenko 2005; Ivchenko vd. 1997; Kiselev vd. 1998) çalışmalarıyla incelenmiştir. Kuantum tellerinde ve kuantum noktalarında elektronların g -faktörü, GaAs/ $Al_xGa_{1-x}As$ ($x = 0.35$) hetero yapısı için uyarılma teorisi kullanılarak hesaplanmıştır. (Kiselev vd. 1998; Дьяконов ve Перель 1971; Ивченко ve Киселев 1992) numaralı çalışmalarda, kuasi-bir boyutlu ve kuasi-sıfır boyutlu sistemlerde, yani kuantum tellerinde ve kuantum noktalarında, elektronlar için Zeeman teorisi oluşturulmuştur. Silindirik kuantum tellerinde ve küresel kuantum noktalarında etkin g -faktörünün sistemin boyutlarına bağımlılığı incelenmiştir. Bu çalışmalarda Kane modeli ve uyarılma teorisi kullanılmıştır. Bu model, hafif yük taşıyıcılarının enerjisindeki parabolik olmama durumunu ve değerlik bandının karmaşıklığını dikkate almayı mümkün kılar. Sistem boyutu küçüldükçe, boyuta bağlı kuantizasyon etkilerinin rolünün arttığı

ve elektronların etkin g-faktörü için farklı kuantum yapılarında $g^{QW} < g^{QWR} < g^{QD}$ ilişkisinin elde edildiği gösterilmiştir. Burada, QW-kuantum kuyuları, QWR-kuantum telleri, QD-kuantum noktalarıdır. Kuantum kuyularından farklı olarak ($g_{\downarrow} \neq g_{\perp}$), silindirik kuantum tellerinde etkin g-faktörü izotropiktir.

Günümüzdeki nanokristal büyütme teknolojisi, yüksek optik duyarlılığa sahip nanokristallerin üretilmesine (Brus 1991; Murray, Norris, ve Bawendi 1993) ve bunların katılanmasına olanak sağlamaktadır (Shim ve Guyot-Sionnest 2000). Bu nanoyapıların fiziksel özelliklerini incelemek için tüm optik spektroskopik yöntemleri kullanılabilir.

Nanokristallerdeki yük taşıyıcılarının enerji seviyelerinin incelenmesi, bunların bantlar arası optik spektroskopide (Ekimov 1991; Kowalski vd. 1994; Norris vd. 1996), tünel spektroskopisinde (Banin vd. 1999) ve bant içi uzak kızılötesi spektroskopide (Guyot-Sionnest ve Hines 1998; Shim ve Guyot-Sionnest 2000) kullanılması amacını taşır. Enerji seviyeleri ve simetrisi hakkında doğru bilgi almak için bantlar arası ve bant içi magneto-optik spektroskopik ve magneto-optik tünel spektroskopisi kullanmak gerekir. Yukarıda adı geçen deneylerin sonuçlarını analiz ederken, manyetik alandaki yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını bilmek gereklidir.

Şu anda modern teknoloji, her tip yarı iletkenlerden 1 nm ve 4 nm boyutlarında nanokristaller üretmeye başlamıştır. Bu nanokristaller genellikle küresel simetriye veya silindirik simetriye sahiptir. Bu nanoyapılardaki yük taşıyıcılarının enerji spektrumları, boyuta bağlı kuantizasyonla oluşan ayrık enerji seviyelerinden oluşur. Enerji seviyeleri, atomlardaki gibi yörünge kuantum sayısı ℓ ve toplam yörünge momenti kuantum sayısı $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ ile karakterize edilir. Dış manyetik alan olmadığında her enerji seviyesi dejenere olmuştur (çürükleşmiştir).

Dış manyetik alandaki yük taşıyıcılarının enerji spektrumları Zeeman etkisi ile ifade edilir. H^2 ile orantılı olan terim çok küçük olduğu için dikkate alınmayacaktır. Nanokristalin boyutu a , manyetik uzunluktan $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}$ çok daha küçüktür $a \ll l$.

Manyetik alanın $H < 10T$ değerlerinde $\left(\frac{a}{l}\right)^4 \ll 1$ koşulu sağlanır.

Bu durumda, uzaysal kısıtlama, manyetik alanın yarattığı kısıtlamadan daha büyüktür. Bu nedenle, zayıf manyetik alanlarda çok bantlı Hamiltonyen'in dalga fonksiyonları olarak, manyetik alanın olmadığı durumdaki dalga fonksiyonlarını alabiliriz (Ivchenko vd. 1997; Rodina, Efros, ve Alekseev 2003).

Dış manyetik alanın nanoyapılardaki boyuta bağlı kuantizasyonlu enerji seviyelerine etkisi, manyetik alanın olmadığı durumda spin-yörünge parçalanmasından Δ_c bağlıdır. Δ_c bu $j+1/2$ ve $j-1/2$ yörünge kuantum sayılarına sahip enerji seviyeleri arasındaki fark $\Delta_c = E_{j+1/2} - E_{j-1/2}$ 'dir (Rodina vd. 2003).

Eğer Zeeman parçalanması, spin-yörünge parçalanmasından daha küçükse, Zeeman parçalanması

$$\Delta E = \mu_B g_j^\pm m H, \quad m = -j, -j+1, \dots, j \quad (6.1)$$

formülüyle hesaplanır (Rodina vd. 2003). Burada, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0c}$ Bor magnetonudur, m_0 ve e serbest elektronların kütlesi ve yüküdür, m yörünge kuantum sayısının manyetik alan yönündeki izdüşümüdür ve g ise Lande faktörüdür.

Eğer Zeeman parçalanması, spin-yörünge parçalanmasından daha büyükse, Zeeman parçalanması (Rodina vd. 2003):

$$\Delta E = \mu_B g_s s H + \mu_B g_l l_z H \quad (6.2)$$

ifadesiyle hesaplanır. Burada, $s = \pm \frac{1}{2}$ ve $l_z = -j, -j+1, \dots, j$, spin ve yörünge momentlerinin manyetik alan yönündeki izdüşümleridir. g_s ve g_l ise elektronların ilgili durumdaki spin ve yörünge g-faktörleridir.

Basit parabolik modele sahip nanokristallerde, g_s hacimdeki elektronların etkin g_c faktörüne eşittir ve $g_l = \frac{m_0}{m_c}$ 'dir, burada m_c elektronların hacimdeki etkin kütesidir. CdS nanoyapılarında Raman spin-flip saçılması olayları incelenirken, elektronların temel haldeki etkin g-faktörünün enerjiye bağlı olduğu bulunmuştur (Perry vd. 1987).

Manyetik alandaki hacim halindeki elektronların enerji spektrumunu elde etmek için kullanılan 8-bantlı Kane modeli, elektronların etkin g-faktörü için aşağıdaki ifadeyi verir (Rodina vd. 2003; Roth vd. 1959):

$$g_c(E) = g^* - \frac{2E_p}{3} \frac{\Delta}{\left(E + E_g\right)\left(E + E_g + \Delta\right)}. \quad (6.3)$$

Burada, E_g yasak bandın genişliğidir, Δ spin-yörünge parçalanmasıdır, E_p ise enerji Kane parametresidir ve $g^* = g_0 + \Delta g$ 'dir. Burada, $g_0 = 2$ serbest elektronların etkin g-faktörüdür, $|\Delta g| \ll 1$ uzakta bulunan bantların elektronların etkin g-faktörüne verdiği katkıdır. (6.3) formülündeki ikinci terim ise değerlik bandının elektronların etkin g-faktörüne verdiği katkıdır. (6.3) denkleminde görüldüğü gibi, boyuta göre kuantumlanmış seviyelerin enerjileri arttıkça bu terim mutlak değerce küçülür. Boyuta göre kuantumlanmış seviyelerin enerjileri, nanoyapıların boyutu değiştikçe değişir. Dolayısıyla, nanoyapının boyutu değiştikçe elektronların etkin g-faktörü de değişir.

Zayıf manyetik alanlarda, çok-bantlı Hamiltonyen iki Hamiltonyen'in toplamı şeklinde gösterilir. Birinci terim manyetik alanın olmadığı durumdaki Hamiltonyen'dir, ikinci terim ise manyetik alanla orantılı olan terimdir. İkinci terim zayıf bir uyarı olarak kabul edilerek, uyarılma teorisi uygulanmış ve elektronların etkin g -faktörünün nanoyapı boyutuna bağımlılığı, yüzey etkileri de dikkate alınarak incelenmiştir (Rodina vd. 2003). Bu bölümde biz, uyarılma teorisini uygulamadan kuantum tellerindeki elektronların etkin g -faktörünün kuantum telinin yarıçapına bağımlılığını inceleyeceğiz.

Bu bölümde, (Babayev vd. 2005; Babayev ve Cakmaktepe 2006; Çakmak vd. 2003; Gashimzade vd. 2004, 2000) çalışmalarına dayanarak, silindirik kuantum tellerinde, anti-tellerinde ve nano-kalınlıktaki içi boş kuantum silindirlerinde, elektronların, hafif ve spin-yörünge etkileşimi nedeniyle parçalanmış boşlukların enerji spektrumlarını aynı anda ifade eden 3-bantlı Kane modeli kullanılmıştır. Bu modelle, hem manyetik alanın olduğu (manyetik alan kuantum telinin ekseni boyunca yönelmiş) hem de olmadığı durumlarda kuantum tellerindeki yük taşıyıcılarının enerji spektrumları, dalga fonksiyonları ve etkin g -faktörleri, uyarılma teorisi kullanılmadan hassas bir şekilde hesaplanmıştır. Kuantum telinin potansiyeli olarak sonsuz kuyu potansiyeli alınmıştır. Bu nedenle, kuantum telinin sınırında elektronların dalga fonksiyonunun sıfıra eşit olması koşulu kullanılmıştır. Manyetik alanda 3 bandın: iletim bandı, değerlik bandı ve spin-yörünge parçalanmış bandın etkileşimi dikkate alınarak yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarının belirlenmesi, Bowers ve Yafet'in çalışmasında incelenmiştir (Bowers ve Yafet 1959). 3-bantlı Kane modelinde, değerlik bandı ile iletim bandı arasındaki etkileşimi dikkate alan tek bir parametre olan P , Kane parametresi olarak eklenmiştir. Ağır boşlukların dispersiyonunu vermeyen Kane denklemleri aşağıdaki gibidir (Balkanski ve Wallis 2000; Kane 1957; Ансельм 1978; Аскеров 1985):

$$-EC_1 - \frac{Pk_-}{\sqrt{2}}C_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_4 + \frac{Pk_+}{\sqrt{6}}C_5 + \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_7 + \frac{Pk_+}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \quad (6.4)$$

$$-EC_2 - \frac{Pk_-}{\sqrt{6}}C_4 + \sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_5 + \frac{Pk_+}{\sqrt{2}}C_6 + \frac{Pk_-}{\sqrt{3}}C_7 - \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \quad (6.5)$$

$$-\frac{Pk_+}{\sqrt{2}}C_1 - (E + E_g)C_3 = 0, \quad (6.6)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_1 - \frac{Pk_+}{\sqrt{6}}C_2 - (E + E_g)C_4 = 0, \quad (6.7)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_2 + \frac{Pk_-}{\sqrt{6}}C_1 - (E + E_g)C_5 = 0, \quad (6.8)$$

$$\frac{Pk_-}{\sqrt{2}}C_2 - (E + E_g)C_6 = 0, \quad (6.9)$$

$$\frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_1 + \frac{Pk_+}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta + E + E_g)C_7 = 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{Pk_-}{\sqrt{3}}C_1 - \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta + E + E_g)C_8 = 0. \quad (6.11)$$

Burada, P Kane parametresi, E_g yasak bandın genişliği, Δ spin-yörünge parçalanması ve $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$, $\vec{k} = -i\vec{\nabla}$ 'dir. Koordinat başlangıcı iletim bandının tabanında alınmıştır.

7.MANYETİK ALAN OLMAYAN DURUMDA KUANTUM TELLERİNDE YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

(6.11) - (6.6) denklemlerinden $C_3 - C_8$ değerlerini bulup (6.4) ve (6.5) denklemlerinde yerine koyarsak, C_1 ve C_2 için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\left\{ -E - \frac{P^2}{3} \left[\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right] \Delta_3 \right\} C_{1,2} = 0. \quad (7.1)$$

Burada, Δ_3 üç boyutlu Laplasyen'dir. Silindirik koordinat sisteminde bu denklemin çözümünü (7.2) denklemi gibi yazabiliriz:

$$C_{1,2} = A \exp(im\varphi + ik_z z) R_{1,2}(\rho). \quad (7.2)$$

Burada, A normalizasyon faktörüdür, k_z ise dalga sayısıdır ve m azimutal kuantum sayısıdır. Radyal dalga fonksiyonu $R(\rho)$ için (7.3) diferansiyel denklemini elde ederiz:

$$\left\{ \frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right) \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - k_z^2 \right] + E \right\} R_{1,2}(\rho) = 0. \quad (7.3)$$

Bu denklemin her iki tarafını $\frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right)$ ifadesine

bölersek

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \chi^2 \right) R_{1,2}(\rho) = 0. \quad (7.4)$$

(7.4) denklemini elde ederiz. (7.4) denkleminde

$$\chi^2 = \frac{3}{P^2} \frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{(3E + 3E_g + 2\Delta)} - k_z^2 \quad (7.5)$$

gösterimi kabul edilmiştir.

(7.4) diferansiyel denklemi bir Bessel denklemidir (Abramowitz ve Stegun 1965); bu denklemin $\rho = 0$ olan durumda düzenli çözümü

$$R_{1,2}(\rho) = CJ_m(\chi\rho). \quad (7.6)$$

Sınırdaki potansiyel sonsuz olduğundan, dalga fonksiyonu $R_{1,2}(R) = 0$ sınır koşulunu sağlamalıdır, böylece kuantum tellerinde yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını bulmak için

$$J_m(\chi R) = 0 \quad (7.7)$$

(7.7) denklemini elde ederiz. (7.5) ve (7.7) denklemlerini kullanarak yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını bulmak için

$$\frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{3E + 3E_g + 2\Delta} = \left(\frac{z_{mp}^2}{R^2} + k_z^2 \right) \frac{P^2}{3} \quad (7.8)$$

denklemini elde edilir. Burada, z_{mp} - $J(z)$ Bessel fonksiyonunun p -inci köküdür. (7.8) denklemini, kuantum tellerinde elektronların, hafif ve spin-orbital etkileşim nedeniyle parçalanmış boşlukların spektrumlarını ifade eden bir denklemdir. Bu denklem, kuantum tellerindeki yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarının parabolik olmamasını analiz etmek için kullanılabilir.

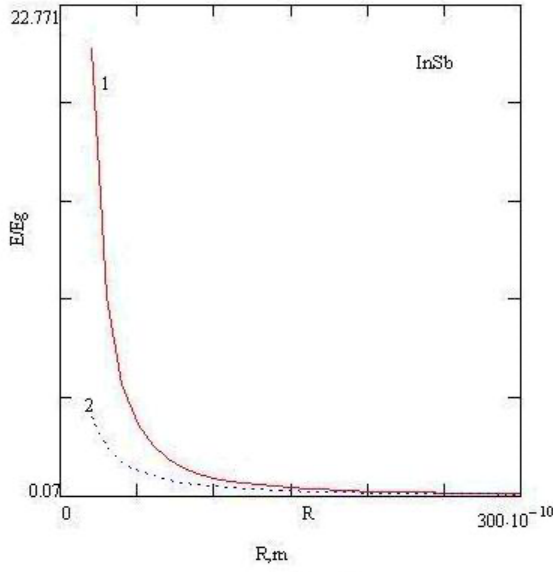
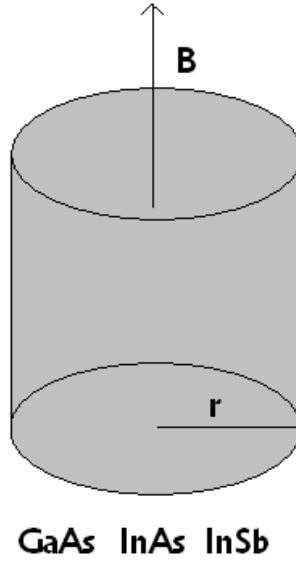


Figure 1

Şekil 7.1. InSb tipi silindirik kuantum tellerinde elektronların enerjisinin kuantum telinin yarıçapına bağlılığı



Şekil 7.2. Yarıçapı R olan yarı iletken kuantum teli

Şekil 7.1'de InSb tipi kuantum tellerinde elektronların enerjisinin kuantum telinin yarıçapına $E(R)$ bağılılığı iki durumda gösterilmiştir: a) parabolik dağılım yasasına sahip olan durum: elektronların enerjisi parabolik olarak değişir; b) Kane dağılım yasasına sahip olan durum: elektronların enerjisi Kane modeline göre değişir. Şekil 7.1'e göre, kuantum telinin yarıçapı arttıkça her iki durumda da elektronların enerjisi birbirine yaklaşır. Kuantum telinin yarıçapı küçüldükçe ise elektronların enerjisi birbirinden belirgin şekilde farklılaşır. Hesaplamalar için aşağıdaki bölge parametreleri kullanılmıştır (InSb):

$$E_g = 0.2368eV; \quad \Delta = 0.810eV; \quad E_p = 23.42eV; \quad E_p = \frac{2m_0}{\hbar^2} P^2; \quad m_0$$

serbest elektronların etkin kütlesidir (Efros ve Rosen 1998).

8. MANYETİK ALAN VARLIĞINDA KANE TİPİ KUANTUM TELLERİNDE YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Elektronların spin dejenerasyonunu dikkate alan Landé faktörü, manyetik alandaki Kane Hamiltonian'ının diyagonal elementlerine $\pm \frac{1}{2} g_0 \mu_B H$ teriminin eklenmesiyle hesaba katılır.

Burada, μ_B Bohr magnetonu, g_0 serbest elektronların g faktörü, H ise harici manyetik alanın yoğunluğudur. Kuantum telinin ekseni boyunca yönelen harici homojen manyetik alan, Kane denklemlerine aşağıdaki gibi seçilen vektör potansiyeli aracılığıyla dahil edilir:

$$\vec{A} = \left(-\frac{Hy}{2}, \frac{Hx}{2}, 0 \right). \quad (8.1)$$

Vektör potansiyelinin bu ifadelerini k_{\pm} operatörünün ifadesinde dikkate alırsak:

$$k_{\pm} \rightarrow k_{\pm} \pm i \frac{1}{2} \lambda_H r_{\pm} \quad (8.2)$$

burada,

$$r_{\pm} = x \pm iy, \quad \lambda_H = \frac{eH}{\hbar c} \quad (8.3)$$

işaretleme kabul edilmiştir. (7.11) - (7.6) denklemlerinden C_3 - C_8 'i bulup (7.4) ve (7.5) denklemlerinde yerine koyarsak ve (8.2),

(8.3) bağıntılarını kullanırsak, C_1 ve C_2 için (8.4) denklemini elde ederiz

$$\left(\begin{array}{l} -E_1 + \frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E_1 + E_g} + \frac{1}{E_1 + E_g + \Delta} \right) (-\nabla^2 + \lambda_H L_z + \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2) \pm \\ \frac{P^2 \lambda_H}{3} \left(\frac{1}{E_1 + E_g} - \frac{1}{E_1 + E_g + \Delta} \right) \end{array} \right) C_{1,2} = 0 \quad (8.4)$$

Burada, L_z hareket miktarının z bileşenidir ve $\rho^2 = x^2 + y^2$ ile

$$E_1 = E \mp \frac{1}{2} g_0 \mu_B H. \quad (8.4) \text{ denklemini:}$$

$$\left(\begin{array}{l} -\nabla^2 + \lambda_H L_z + \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2 \pm \\ \lambda_H \frac{\Delta}{3E_1 + 3E_g + 2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E_1 (E_1 + E_g) (E_1 + E_g + \Delta)}{3E_1 + 3E_g + 2\Delta} \end{array} \right) C_{1,2} = 0 \quad (8.5)$$

(8.5) denklemini şekilde yazabiliriz. Silindirik koordinat sisteminde (8.5) denkleminin çözümü

$$C_{1,2} = A_{ml} \exp(im\phi + ik_z z) F_{1,2}(\rho) \quad (8.6)$$

şeklinde arayalım. Silindirik koordinat sisteminde ∇^2 ve L_z operatörlerinin aşağıdaki ifadelerini dikkate alırsak:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (8.7)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (8.8)$$

(8.5) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \lambda_H m + \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2 + k_z^2 \pm \\ \lambda_H \frac{\Delta}{3E_1 + 3E_g + 2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E_1(E_1 + E_g)(E_1 + E_g + \Delta)}{3E_1 + 3E_g + 2\Delta} \end{array} \right) F_{1,2} = 0. \quad (8.9)$$

Aşağıdaki işaretlemeyi kabul edelim:

$$k_z^2 \pm \lambda_H \frac{\Delta}{3E_1 + 3E_g + 2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E_1(E_1 + E_g)(E_1 + E_g + \Delta)}{3E_1 + 3E_g + 2\Delta} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} B(E). \quad (8.10)$$

(8.9) denklemini aşağıdaki gibi yazarız:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} B(E) - \lambda_H m - \frac{m^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2 \right] \right) F_{1,2} = 0. \quad (8.11)$$

$k_i^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} B(E)$ işaretini kabul edip yeni ξ değişkenine geçelim:

$$\xi = \frac{\rho^2}{2l_H^2}. \quad (8.12)$$

(8.11) denkleminde bulunan türevleri yeni değişkenle ifade edelim:

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi}, \quad (8.13)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\rho^2}{l_H^4} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{l_H^2} \frac{d}{d\xi}. \quad (8.14)$$

(8.13) ve (8.14) formüllerini kullanarak (8.11) denklemini

$$\frac{d^2 F_{1,2}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dF_{1,2}}{d\xi} + \left[\frac{k_t^2 l_H^2}{2\xi} - \frac{m^2}{4\xi^2} + \frac{m}{2\xi} - \frac{1}{4} \right] F_{1,2} = 0 \quad (8.15)$$

denklemini şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin çözümü

$$F_{1,2} = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \xi^{\frac{|m|}{2}} \Phi_{1,2}(\xi). \quad (8.16)$$

$\Phi(\xi)$ şeklindeki radial fonksiyon için aşağıdaki denklemini elde ederiz:

$$\xi \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + (|m| + 1 - \xi) \frac{d\Phi}{d\xi} - \alpha_{1,2} \Phi = 0. \quad (8.17)$$

(8.17) denkleminin çözümü, dejenere hipergeometrik Kummer fonksiyonudur (Abramowitz ve Stegun 1965). (8.17)

denkleminin $\rho = 0$ durumundaki düzenli çözümü

$$\Phi(\xi) = M(\alpha_{1,2}, b, \xi). \quad (8.18)$$

Burada,

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2} k_z^2 l_H^2 - \frac{3E_1}{\hbar\omega_0} \frac{(E_1 + E_g)(E_1 + E_g + \Delta)}{(3E_1 + 3E_g + 2\Delta)E_p} \pm \frac{\Delta}{2(3E_1 + 3E_g + 2\Delta)} \quad (8.19)$$

Burada, $\omega_0 = \frac{eH}{m_0c}$ serbest elektronlar için siklotron frekansdır,

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}} \text{ manyetik uzunluktur ve } E_p = \frac{2m_0}{\hbar^2} P^2$$

$$b = |m| + 1. \quad (8.20)$$

Kummer fonksiyonunun parametreleridir. $\rho = R$ durumunda dalga fonksiyonu, sınır koşuluna göre $C_{1,2} = 0$ olmalıdır. Bu koşul, yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını belirlemek için (8.21) denklemini verir:

$$M\left(\alpha_{1,2}, b, \frac{R^2}{2l_H^2}\right) = 0. \quad (8.21)$$

(8.21) denklemini kullanarak silindir yarıçapı R , kuantum sayısı m ve manyetik alan H değerleri için $\alpha_{1,2}(R, m, H)$ 'i buluruz. $\alpha_{1,2}(R, m, H)$ 'nin bulunan değerlerini (8.19) denkleminde yerine koyarak enerjinin $E(R, m, H)$ değerlerini elde ederiz. Yük taşıyıcılarının efektif g-faktörleri ise Zeeman ayrılmasından yararlanılarak

$$g(E) = \frac{E_{\uparrow} - E_{\downarrow}}{\mu_B H} \quad (8.22)$$

bulunur.

Burada, E_{\uparrow} ve E_{\downarrow} elektronların enerjisinin sırasıyla spin yukarı ve spin aşağı yönündeki değerleridir.

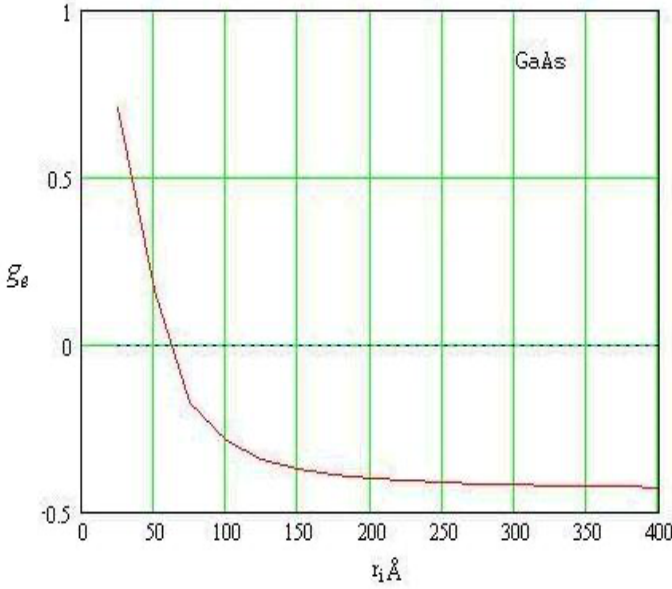


Figure 2

Şekil 8.1. GaAs silindirik kuantum tellerinde elektronların etkin g-faktörünün kuantum telinin yarıçapına bağlılığı

Şekil 8.1 ve Şekil 8.2'te, GaAs ve InSb tipi yarı iletken kuantum tellerinde manyetik alanın $H = 0.5T$ olduğu durumda, elektronların ve hafif boşlukların etkin g-faktörlerinin yarıçap R 'ye olan bağlılığı gösterilmiştir.

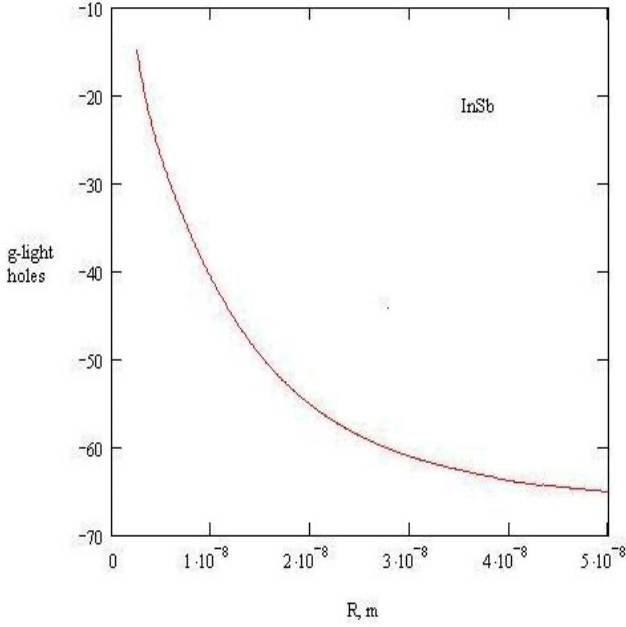


Figure 3

Şekil 8.2. InSb tipi silindirik kuantum tellerinde hafif boşlukların etkin g-faktörünün kuantum telinin yarıçapına bağlılığı

Şekilden de görüldüğü gibi, GaAs kuantum tellerinde elektronların g-faktörü, kuantum telinin yarıçapı arttıkça işaretini değiştirir. Kane modelinde, yukarıda yer alan bölgelerin g-faktörüne katkısını dikkate almak için, bulunan g değerlerine $\Delta g = -0.12$ eklemek gerekir (Kiselev vd. 1998). Bu sonuç, GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7} heteroyapısı için elde edilen sonuçlarla uyumludur. GaAs için aşağıdaki bölge parametreleri kullanılmıştır: $E_g = 1.52eV$; $\Delta = 0.34eV$; $E_p = 28.9eV$;

$E_p = \frac{2m_0}{\hbar^2} P^2$; m_0 serbest elektronun kütlesidir (Kiselev vd. 1998).

Şekillerden de görüldüğü gibi, R değeri arttıkça g -faktörünün değeri, hacimdeki (bulk) değere yaklaşmaktadır.

Şekil 8.3'da, $R = 30nm$ ve m kuantum sayısının $m = 0, \pm 1, \pm 2$ olduğu durumlarda, InAs kuantum telindeki elektron enerjisinin manyetik alana bağlılığı gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi, m kuantum sayısının negatif değerlerinde enerji minimuma ulaşır. Bu sonuç, (Constantinou, Masale, ve Tilley 1992) numaralı çalışmaların sonuçlarıyla uyumludur.

Hafif ve spin-orbital olarak ayrılmış boşluklar d in en $E_g = 0.42eV$ erjisinin manyetik alana bağlılığı, (8.25) denklemin diğer iki kökü kul $\frac{\pi}{d}$ lanılarak oluşturulabilir. InAs için aşağıdaki bölge parametreleri kullanılmıştır: ; $\Delta = 0.38eV$; $E_p = 28.9eV$. Sonlu yüksekliğine sahip kuantum tellerinde

$$k_z = \frac{\pi}{d}l, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (8.23)$$

olarak almak gerekir ve k_z 'in minimum değeri 'dir.

Elde edilen sonuçlar, yasak bölgesi olmayan HgTe ve yasak bölgesi dar olan $Cd_{1-x}Hg_xTe$ yarı iletken kuantum tellerine de uygulanabilir.

Bu paragrafta, 3 bölgeli Kane modeli kullanılarak, manyetik alan olan ve olmayan durumlarda elektronların enerji spektrumları ve elektronların, hafif boşlukların ve spin-orbital olarak ayrılmış boşlukların etkin g -faktörleri, silindirik kuantum tellerinde hesaplanmıştır.

Elektronların ve hafif boşlukların etkin g -faktörlerinin kuantum tellerinin yarıçapı arttıkça azaldığı gösterilmiştir. GaAs tipi kuantum tellerinde ise elektronların etkin g -faktörü, yarıçap arttıkça işaretini değiştirir.

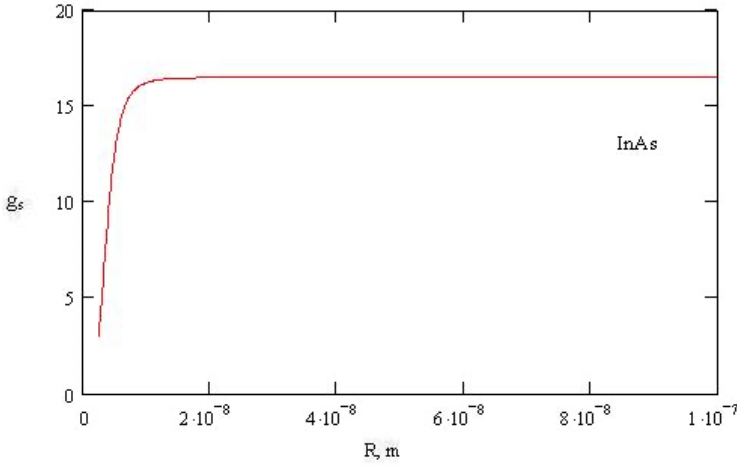


Figure 4

Şekil 8.3. InAs silindirik kuantum tellerinde spin-orbital olarak ayrılmış boşlukların etkin g-faktörünün, kuantum telinin yarıçapına bağlılığı

A_3B_5 ve A_2B_6 tipi yarı iletken kuantum tellerinde yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarının, kuantum tellerinin yarıçapına bağlılığı incelenmiş ve elektronların, hafif ve spin-orbital olarak ayrılmış boşlukların enerji spektrumlarının parabolik olmaması dikkate alınmıştır.

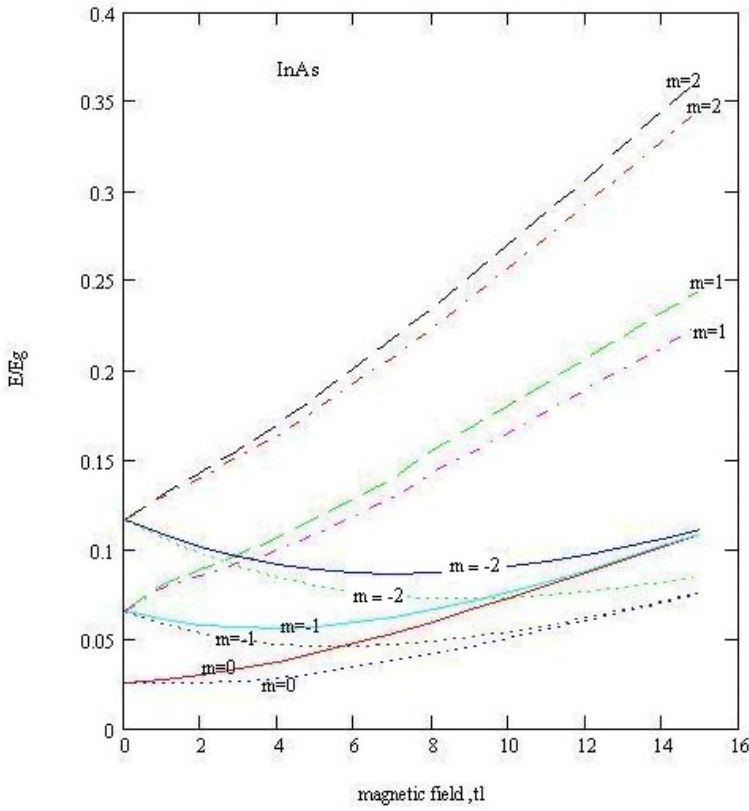


Figure 5

Şekil 8.4. InAs tipi kuantum tellerinde elektronların temel durum enerjisinin manyetik alana bağlılığı. $m=-2, -1, 0, 1, 2$, $R=30\text{nm}$, $l=0$, $k_z=0$

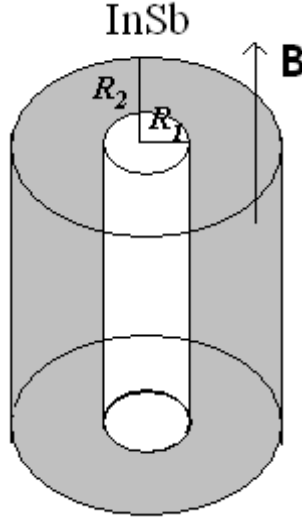
9.KANE TİPİ YARI İLETKENLERDEN YAPILMIŞ NANO KALINLIKTAKİ İÇİ BOŞ KUANTUM SİLİNDİRLERİNDE YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Son zamanlarda çeşitli geometrik şekillere sahip yarı iletken nanoyapılar üretilmektedir. Nanoyapıların temel avantajlarından biri, geometrik boyutlarını ve şekillerini değiştirerek fiziksel özelliklerini kontrol etmenin mümkün olmasıdır. Bu paragrafta, belirli bir nano kalınlığa sahip Kane tipi yarı iletken yapılmış içi boş bir silindirde, manyetik alanlı ve alansız durumlarda yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını ve dalga fonksiyonlarını bulacağız. Önceki paragrafta, dolu bir silindirde bu sorunun çözümünü bulmuştuk. Azimutal kuantum sayısının negatif değerlerinde enerjinin manyetik alana bağımlılığında bir minimuma sahip olduğu ve $m=0$ durumunun her zaman temel hal olarak kaldığı gösterilmişti. Şimdi ise Kane tipi yarı iletkenlerden yapılmış içi boş bir silindirde, dolu silindire kıyasla yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarında ne gibi değişiklikler olacağını inceleyeceğiz.

Bu tür bir sorun, basit parabolik spektrin olduğu durum için (Masale 2000; Masale vd. 1992) numaralı çalışmalarda ele alınmıştır. Ancak, basit parabolik model, yük taşıyıcılarının enerji spektrumunun parabolik olmamasını ve spin etkilerini dikkate almaya olanak sağlamaz. Bu nedenle, yük taşıyıcılarının enerji spektrumunun parabolik olmamasını ve spin durumlarını dikkate almamızı sağlayan 3 bölgeli Kane modelini kullanacağız.

3 bölgeli Kane denklemlerini, iç yarıçapı R_1 ve dış yarıçapı R_2 olan içi boş bir silindire uygulayacağız. Varsayalım ki, yarıçaplar arasında koruyucu potansiyelin değeri sıfıra, sınırlarda ise sonsuz

bir değere eşittir. Bu durumda, sınırlarda dalga fonksiyonu sıfır olmalıdır.



Şekil 9.1. Nano kalınlığa sahip içi boş silindir

3 bölge Kane modelinde, valans bölgesi ile iletkenlik bölgesi arasındaki etkileşimi dikkate alan ve tek-Kane parametresi olarak adlandırılan P eklenmiştir. Ağır boşlukların dağılımını vermeyen Kane denklemleri (Kane 1957; Ансельм 1978; Аскеров 1985)'de aşağıdadır:

$$-EC_1 - \frac{Pk_-}{\sqrt{2}}C_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_4 + \frac{Pk_+}{\sqrt{6}}C_5 + \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_7 + \frac{Pk_+}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \quad (9.1)$$

$$-EC_2 - \frac{Pk_-}{\sqrt{6}}C_4 + \sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_5 + \frac{Pk_+}{\sqrt{2}}C_6 + \frac{Pk_-}{\sqrt{3}}C_7 - \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \quad (9.2)$$

$$-\frac{Pk_+}{\sqrt{2}}C_1 - (E + E_g)C_3 = 0, \quad (9.3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_z C_1 - \frac{Pk_+}{\sqrt{6}}C_2 - (E + E_g)C_4 = 0, \quad (9.4)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_z C_2 + \frac{Pk_-}{\sqrt{6}}C_1 - (E + E_g)C_5 = 0, \quad (9.5)$$

$$\frac{Pk_-}{\sqrt{2}}C_2 - (E + E_g)C_6 = 0, \quad (9.6)$$

$$\frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_1 + \frac{Pk_+}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta + E + E_g)C_7 = 0, \quad (9.7)$$

$$\frac{Pk_-}{\sqrt{3}}C_1 - \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta + E + E_g)C_8 = 0. \quad (9.8)$$

Burada, P Kane parametresi, E_g yasak bölgenin genişliği, Δ spin-orbital ayrılması ve $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$, $\vec{k} = -i\vec{\nabla}$. Koordinat başlangıcı, iletkenlik bölgesinin tabanında alınmıştır. (9.3)-(9.8) denklemlerinden $C_3 - C_8$ 'i bulup (9.1) ve (9.2) denklemlerinde yerine koyarsak:

$$\left\{ -E - \frac{P^2}{3} \left[\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right] \Delta_3 \right\} C_{1,2} = 0 \quad (9.9)$$

(9.9) denklemini elde ederiz. Burada, Δ_3 3 boyutlu Laplas operatörüdür. Silindirik koordinat sisteminde bu denklemin çözümünü (4.10) denklemi gibi yazabiliriz:

$$C_{1,2} = A \exp(im\varphi + ik_z z) R_{1,2}(\rho). \quad (9.10)$$

Burada, A normalizasyon çarpanı, k_z dalga sayısı, m ise azimut kuantum sayısıdır. Radial dalga fonksiyonu $R(\rho)$ için (9.11) diferansiyel denklemini elde ederiz:

$$\left\{ \frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E+E_g} + \frac{1}{E+E_g+\Delta} \right) \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - k_z^2 \right] + E \right\} R_{1,2}(\rho) = 0. \quad (9.11)$$

Bu denklemi (9.12) denklemi formunda yazabiliriz:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \chi^2 \right) R_{1,2}(\rho) = 0. \quad (9.12)$$

Burada,

$$\chi^2 = \frac{3}{P^2} \frac{E(E+E_g)(E+E_g+\Delta)}{(3E+3E_g+2\Delta)} - k_z^2. \quad (9.13)$$

(9.13) denkleminin genel çözümü:

$$f_{1,2}(\rho) = AJ_m(\chi\rho) + BN_m(\chi\rho) \quad (9.14)$$

şekilde yazabiliriz. Burada, $J_m(\chi\rho)$ ve $N_m(\chi\rho)$ sırasıyla birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarıdır. Dalga fonksiyonları (4.15) sınır koşullarını sağlamalıdır:

$$f_{1,2}(R_1) = f_{1,2}(R_2) = 0. \quad (9.15)$$

(9.15) sınır koşulu, yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını belirlemek için (9.16) ve (9.17) denklemlerini verir:

$$AJ_m(\chi R_1) + BN_m(\chi R_1) = 0, \quad (9.16)$$

$$AJ_m(\chi R_2) + BN_m(\chi R_2) = 0. \quad (9.17)$$

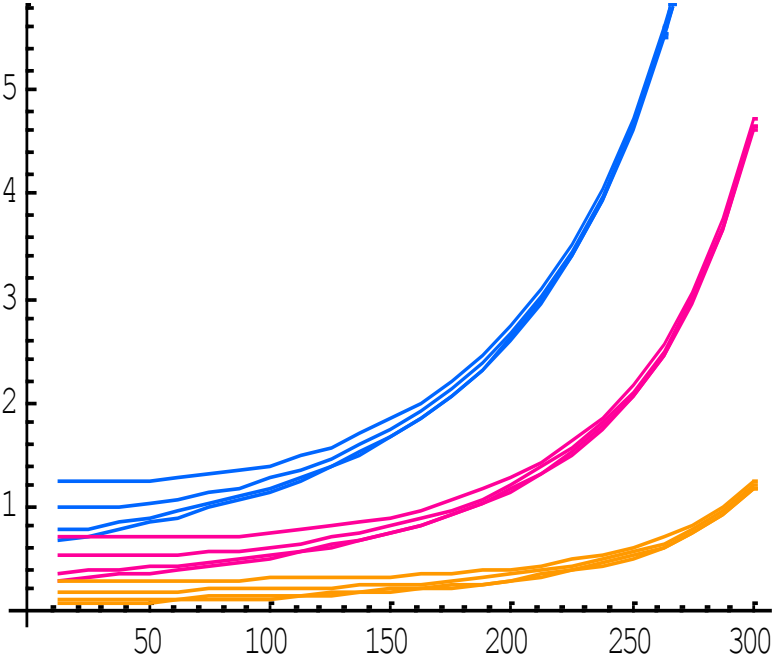
(9.16) ve (9.17) denklemlerinin katsayılarından oluşturulan matrisin determinantını sıfıra eşitlediğimizde (9.18) denklemini elde ederiz.

$$J_m(\chi R_1)N_m(\chi R_2) - J_m(\chi R_2)N_m(\chi R_1) = 0. \quad (9.18)$$

Eğer $\chi = \chi_{nm}$, (9.18) transandantal denkleminin n'inci kökü ise, yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarını belirlemek için (9.19) denklemini elde ederiz

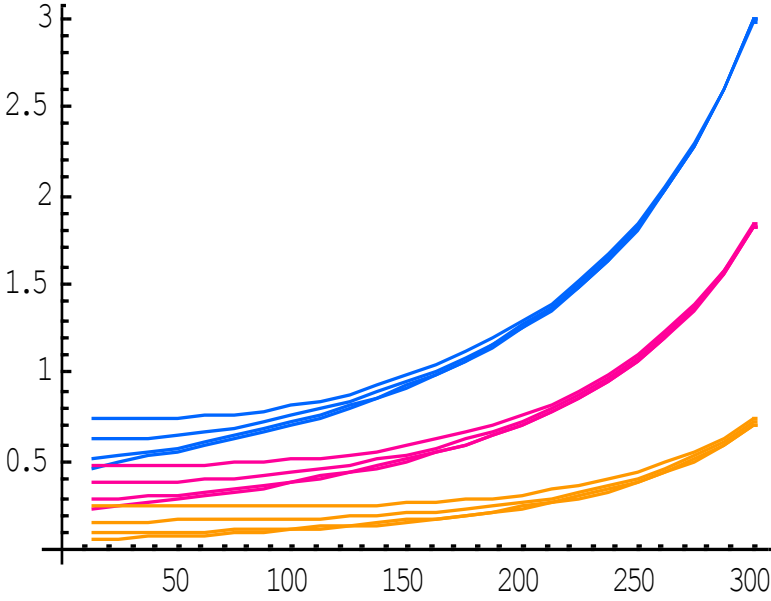
$$\frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{3E + 3E_g + 2\Delta} = \left(\frac{\chi_{nm}^2}{R^2} + k_z^2 \right) \frac{P^2}{3}. \quad (9.19)$$

(9.19) denklemi, hafif yük taşıyıcılarının; yani elektronların, hafif boşlukların ve spin-orbital olarak ayrılmış boşlukların enerji spektrumlarını belirler. Bu denklem kullanılarak yük taşıyıcılarının enerjilerinin parabolik olmaması analiz edilebilir.



Şekil 9.2. Parabolik durumda, düşük enerji seviyelerinin iç yarıçap R_1 'e bağlılığı. Dış yarıçap $R_2=40\text{nm}$. (l, m) kuantum sayılarının aldığı değerler: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$

Şekil 9.1 ve Şekil 9.2'de, InSb tipi içi boş bir silindirde elektronların enerjisinin iç yarıçapa $E(R)$ bağlılığı iki durumda gösterilmiştir. Enerji seviyeleri (l, m) kuantum sayılarıyla ifade edilmiştir. Karşılaştırma amacıyla, hesaplamalar parabolik ve parabolik olmayan durumlar için yapılmıştır. Dış yarıçap $R_2 = 40\text{nm}$ alınmıştır.



Şekil 9.3. Parabolik olmayan durumda, düşük enerji seviyelerinin iç yarıçap R_1 'e bağlılığı. Dış yarıçapın değeri $R_2=400$ Å. (l,m) değerleri: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$

Şekilden görüldüğü gibi, iç yarıçapın küçük değerlerinde m kuantum sayısına göre ayrılma büyüktür. İç yarıçap dış yarıçapa yaklaştıkça, m kuantum sayısına göre ayrılma küçülür ve aynı l kuantum sayısında toplanır. Hesaplamalar için aşağıdaki bölge parametreleri kullanılmıştır (InSb): $E_g = 0.2368eV$, $\Delta = 0.810eV$,

$E_p = 23.42eV$, $E_p = \frac{2m_0}{\hbar^2} P^2$, m_0 serbest elektronların etkin kütesidir (Efros ve Rosen 1998).

10.HARİCİ MANYETİK ALAN VARLIĞINDA NANO KALINLIĞA SAHİP KANE TİPİ YARI İLETKENLERDEN YAPILMIŞ İÇİ BOŞ KUANTUM SİLİNDİRLERİNDE YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Nano kalınlığa sahip içi boş silindirin ekseni boyunca yönelen harici homojen manyetik alan, Kane denklemlerine aşağıdaki gibi seçilmiş vektör potansiyeli aracılığıyla dahil edilir

$$\vec{A} = \left(-\frac{Hy}{2}, \frac{Hx}{2}, 0 \right). \quad (10.1)$$

k_{\pm} 'i yerine koyarsak

$$k_{\pm} \rightarrow k_{\pm} \pm i \frac{1}{2} \lambda_H r_{\pm} \quad (10.2)$$

burada,

$$r_{\pm} = x \pm iy, \quad \lambda_H = \frac{eH}{\hbar c}. \quad (10.3)$$

(9.3) - (9.8) denklemlerinden C_3 - C_8 'i bulup (9.1) ve (9.2) denklemlerinde yerine koyarsak ve (10.2), (10.3) bağıntılarını kullanırsak, $C_{1,2}$ için (10.4) denklemini elde ederiz

$$\left(\begin{array}{l} -E + \frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right) (-\nabla^2 + \lambda_H L_z + \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2) \pm \\ \frac{P^2 \lambda_H}{3} \left(\frac{1}{E + E_g} - \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right) \end{array} \right) C_{1,2} = 0. \quad (10.4)$$

Burada, L_z hareket miktarının z bileşenidir ve $\rho^2 = x^2 + y^2$. (10.4)

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\left(\begin{array}{l} -\nabla^2 + \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2 \pm \\ \lambda_H \frac{\Delta}{3E + 3E_g + 2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{3E + 3E_g + 2\Delta} \end{array} \right) C_{1,2} = 0. \quad (10.5)$$

Silindirik koordinat sisteminde (10.5) denkleminin çözümünü

(10.6) denklemi şeklinde arayalım

$$C_{1,2} = A_{ml} \exp(im\phi + ik_z z) F_{1,2}(\rho). \quad (10.6)$$

Silindirik koordinat sisteminde ∇^2 ve L_z operatörlerinin (10.7) ve

(10.8) denklemlerinde yazılan ifadelerini dikkate alırsak:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (10.7)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (10.8)$$

(10.5) denklemini (10.9) denklemi şeklinde yazabiliriz:

$$\left(\begin{array}{l} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \lambda_H m + \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2 + k_z^2 \pm \\ \lambda_H \frac{\Delta}{3E + 3E_g + 2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{3E + 3E_g + 2\Delta} \end{array} \right) F_{1,2} = 0 \quad (10.9)$$

(10.5) denkleminde

$$k_z^2 \pm \lambda_H \frac{\Delta}{3E + 3E_g + 2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{3E + 3E_g + 2\Delta} = -\frac{2m}{\hbar^2} B(E) \quad (10.10)$$

işaretlemesi kabul edildi. (10.9) denklemini

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} B(E) - \lambda_H m - \frac{m^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2 \right] \right) F_{1,2} = 0 \quad (10.11)$$

olarak yazalım. $k_i^2 = \frac{2m}{\hbar^2} B(E)$ işaretini kabul edip yeni ξ

değişkenine geçelim.

$$\xi = \frac{\rho^2}{2l_H^2} \quad (10.12)$$

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \quad (10.13)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\rho^4}{l_H^4} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \quad (10.14)$$

(10.12)-(10.14) formüllerini kullanarak (10.11) denklemini (10.15) şeklinde yazabiliriz:

$$\frac{d^2 F_{1,2}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dF_{1,2}}{d\xi} + \left[\frac{k_t^2 l_H^2}{2\xi} - \frac{m^2}{4\xi^2} + \frac{m}{2\xi} - \frac{1}{4} \right] F_{1,2} = 0. \quad (10.15)$$

Bu denklemin çözümü

$$F_{1,2} = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \xi^{\frac{|m|}{2}} \Phi_{1,2}(\xi) \quad (10.16)$$

formunda arayalım. Bu durumda, radial fonksiyon $\Phi(\xi)$ için (10.17) denklemini elde ederiz:

$$\xi \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + (|m| + 1 - \xi) \frac{d\Phi}{d\xi} - \alpha_{1,2} \Phi = 0. \quad (10.17)$$

(10.17) denkleminin çözümü, dejenere hipergeometrik Kummer fonksiyonudur (Sirenko vd. 1998). (10.17) denkleminin nano kalınlıklı içi boş silindir için genel çözümü:

$$\Phi(\xi) = C_1 M(\alpha_{1,2}, b, \xi) + C_2 U(\alpha_{1,2}, b, \xi). \quad (10.18)$$

Burada, C_1 ve C_2 sabit sayılardır. $M(\alpha_{1,2}, b, \xi)$ ve $U(\alpha_{1,2}, b, \xi)$ fonksiyonları, birinci ve ikinci türden dejenere hipergeometrik fonksiyonlardır ve

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2} k_z^2 l_H^2 - \frac{3E}{\hbar\omega_0} \frac{(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{(3E + 3E_g + 2\Delta)E_p} \pm \frac{\Delta}{2(3E + 3E_g + 2\Delta)} \quad (10.19)$$

$$\omega_0 = \frac{eH}{m_0c} \text{ serbest elektron için siklotron frekansıdır, } l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}$$

manyetik uzunluktur ve $E_p = \frac{2m_0}{\hbar^2} P^2$, $b = |m| + 1$.

Belirli bir nano kalınlığa sahip içi boş silindirde, yük taşıyıcılarının $E_{nm\sigma}$ enerji seviyeleri n (radyal kuantum sayısı), m (azimut kuantum sayısı) ve $\sigma = \pm 1/2$ spin kuantum sayıları ile karakterize edilir. Radyal fonksiyonlar $\Phi(R_1) = \Phi(R_2) = 0$ sınır koşulunu sağlamalıdır. Bu koşullar iki cebirsel denklem verir

$$C_1 M(\alpha_{1,2}, b, \xi_1) + C_2 U(\alpha_{1,2}, b, \xi_1) = 0, \quad (10.20)$$

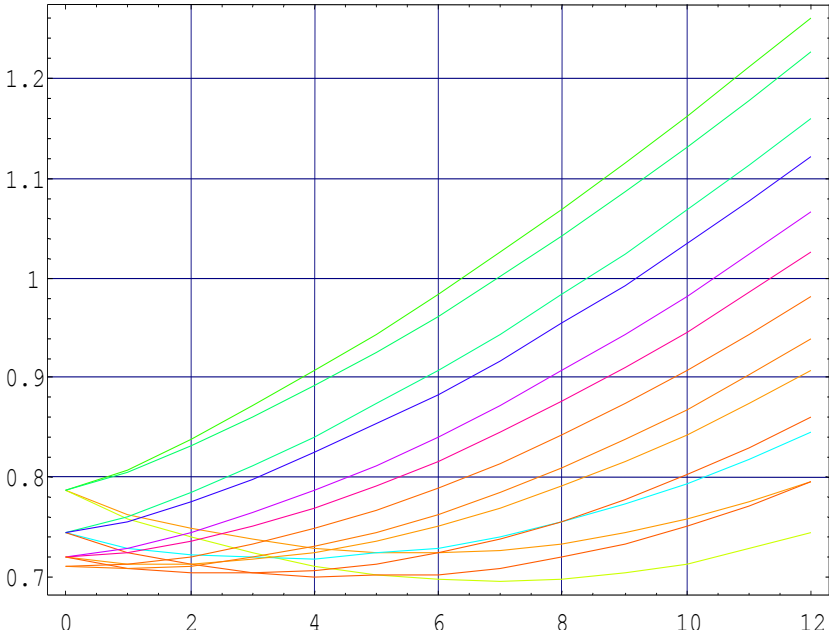
$$C_1 M(\alpha_{1,2}, b, \xi_2) + C_2 U(\alpha_{1,2}, b, \xi_2) = 0. \quad (10.21)$$

Bu denklemlerin katsayılarından oluşturulan matrisin determinantını sıfıra eşitlersek:

$$M(\alpha_{1,2}, b, \xi_1)U(\alpha_{1,2}, b, \xi_2) - M(\alpha_{1,2}, b, \xi_2)U(\alpha_{1,2}, b, \xi_1) = 0 \quad (10.22)$$

transandantal denklemini elde ederiz. (10.22) denklemini b , ξ_1 ve ξ_2 parametrelerinin bilinen değerleriyle çözerek $\alpha_{1,2}$ 'i buluruz. $\alpha_{1,2}$ değerlerini (10.19) denklemde yerine koyarak enerjiyi

bulabiliriz. Şekil 10.1'da, iç yarıçapı $R_1 = 20nm$ ve dış yarıçapı $R_2 = 30nm$ olan InSb tipi içi boş bir silindirde, $n=0$ ve m kuantum sayısının farklı değerleri için elektron enerjisinin manyetik alana bağlılığı gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi, $m=0$, $s = \frac{1}{2}$ ve m kuantum sayısının negatif değerlerinde enerji minimumuna ulaşır. Enerji minimumları, manyetik alanın (0.37, 1.397, 2.709, 3.6, 5.7, 6.86) değerlerinde elde edilir.

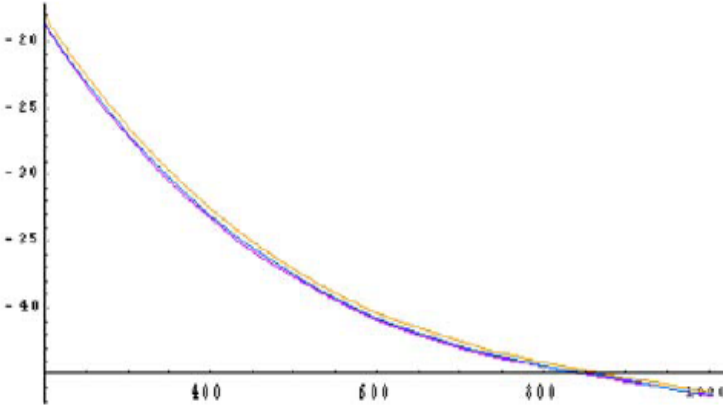


Şekil 10.1. InSb tipi içi boş nano silindirlerde, $l=0$, $k_z=0$ ve $m=0$ olduğu durumda elektron enerjisinin manyetik alana bağlılığı

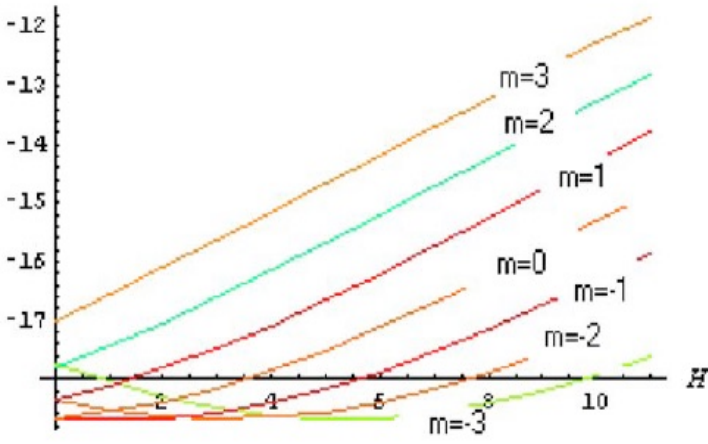
Manyetik alanın küçük değerlerinde Zeeman ayrılması artar, $E(m)$ artar, $E(-m)$ ise azalır. Manyetik alan arttıkça, H^2 ile orantılı olan terim $E(-m)$ teriminden daha büyük olduğu için

$E(-m)$ eğrisi artmaya başlar. Tam silindir halinden farklı olarak, (0,0) durumu her zaman temel durum değildir. Bu durum sadece manyetik alanın küçük değerlerinde temel durum olarak kalır. Manyetik alan arttıkça, temel durum yerini (0,-1), (0,-2), (0,-3) durumlarına bırakır. Şekil 10.2'de, InSb tipi içi boş bir silindirde elektronların etkin g-faktörünün iç yarıçapa bağlılığı gösterilmiştir. Bu durumda yarıçap oranı $\frac{R_2}{R_1} = 1.5$ 'tir. Şekilden görüldüğü gibi, yarıçap büyüdükçe elektronların g-faktörü azalır.

Şekil 10.3'de ise, InSb tipi içi boş nano silindirlerde elektronların etkin g-faktörünün manyetik alana bağlılığı gösterilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı üzere, m kuantum sayısının negatif değerlerinde, elektronların etkin g-faktörlerinin manyetik alana bağlılığında bir minimum oluşur.



Şekil 10.2. InSb tipi içi boş nano silindirlerde elektronların etkin g-faktörünün, iç yarıçapa bağlılığı



Şekil 10.3. InSb tipi içi boş nano silindirlere elektronların etkin g-faktörünün, manyetik alana bağlılığı

11.KANE TİPİ YARI İLETKEN KUANTUM ANTI-TELLERİNDE YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Bu paragrafta, elektronların, hafif boşlukların ve spin-orbital etkileşimleri nedeniyle ayrılmış boşlukların spektrumlarını aynı anda ifade eden 3 bölgeli Kane modeli kullanılarak, manyetik alanlı (manyetik alan kuantum telinin eksenini boyunca yönlendirilmiştir) ve manyetik alansız durumlarda anti-tellerdeki yük taşıyıcılarının enerji spektrumları, dalga fonksiyonları ve g-faktörleri hesaplanmıştır.

Anti-tel, sonsuz boyutlu kompozit bir yarı iletkenin içinin oyulmasıyla elde edilen uzun, silindirik bir oyuktur. (Alivisatos 1996) numaralı çalışmada, yarıçapı a olan silindirin dışında hareket eden bir elektronun hareketini sınırlayan bir model oluşturulmuştur. Hareketi sınırlanmış bu elektronik sisteme anti-nokta veya daha basitçe anti-tel adı verilmiştir.

Masale'nin (Masale 2000) çalışmasında, etkin kütle yaklaşımı kullanılarak, manyetik alandaki silindirik bir boşluğun kenarında elektronların enerji spektrumları hesaplanmıştır. Manyetik alan silindirin eksenini boyunca yönlendirilmiştir. Enerji spektrumunun manyetik alana bağımlılığında, küçük yarıçaplı boşluk durumunda, m kuantum sayısının değerlerinde tüm temel durumlar dejenere olmuştur.

Kuantum anti-tellerinin potansiyeli sonsuz kuyu potansiyeli olarak alınmış, bu nedenle kuantum telinin sınırında elektronların dalga fonksiyonunun sıfıra eşit olması şartı kullanılmıştır.

Diyagonal elemanlara dahil olan serbest elektronlara ait $\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$

terimi ve Pauli spin terimi, elektronların etkin kütlelerine ve etkin g-faktörüne küçük katkılar sağladığı için dikkate alınmayacaktır.

3 bölgeli Kane modelinde, valans bölgesi ile iletkenlik bölgesi arasındaki etkileşimi dikkate alan ve tek-Kane parametresi olarak adlandırılan P dahil edilmiştir. Ağır boşlukların dağılımını vermeyen Kane denklemleri (Kiselev vd. 1998; Zawadzki, Klahn, ve Merkt 1986; Ансельм 1978; Аскеров 1985) aşağıdadır:

$$-EC_1 - \frac{Pk_-}{\sqrt{2}}C_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_4 + \frac{Pk_+}{\sqrt{6}}C_5 + \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_7 + \frac{Pk_+}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \quad (11.1)$$

$$-EC_2 - \frac{Pk_-}{\sqrt{6}}C_4 + \sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_5 + \frac{Pk_+}{\sqrt{2}}C_6 + \frac{Pk_-}{\sqrt{3}}C_7 - \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \quad (11.2)$$

$$-\frac{Pk_+}{\sqrt{2}}C_1 - (E + E_g)C_3 = 0, \quad (11.3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_1 - \frac{Pk_+}{\sqrt{6}}C_2 - (E + E_g)C_4 = 0, \quad (11.4)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_zC_2 + \frac{Pk_-}{\sqrt{6}}C_1 - (E + E_g)C_5 = 0, \quad (11.5)$$

$$\frac{Pk_-}{\sqrt{2}}C_2 - (E + E_g)C_6 = 0, \quad (11.6)$$

$$\frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_1 + \frac{Pk_+}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta + E + E_g)C_7 = 0, \quad (11.7)$$

$$\frac{Pk_-}{\sqrt{3}}C_1 - \frac{Pk_z}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta + E + E_g)C_8 = 0. \quad (11.8)$$

Burada, P Kane parametresi, E_g yasak bölgenin genişliği, Δ spin-orbital ayrılması ve $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$, $\vec{k} = -i\vec{\nabla}$. Koordinat başlangıcı, iletkenlik bölgesinin tabanında alınmıştır. (11.3)-(11.8) denklemlerinden $C_3 - C_8$ 'i bulup (11.1) ve (11.2) denklemlerinde yerine koyarsak:

$$\left\{ -E - \frac{P^2}{3} \left[\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right] \Delta_3 \right\} C_{1,2} = 0. \quad (11.9)$$

Burada, Δ_3 3 boyutlu Laplas operatörüdür. Silindirik koordinat sisteminde bu denklemin çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$C_{1,2} = A \exp(im\varphi + ik_z z) R_{1,2}(\rho). \quad (11.10)$$

Burada, A normalizasyon çarpanı, k_z dalga sayısı, m ise azimut kuantum sayısıdır. Radial dalga fonksiyonu $R(\rho)$ için (11.11) diferansiyel denklemini elde ederiz:

$$\left\{ \frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right) \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - k_z^2 \right] + E \right\} R_{1,2}(\rho) = 0. \quad (11.11)$$

Bu denklemin her iki tarafını $\frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right)$ ifadesine

bölürsek, aynı denklemi

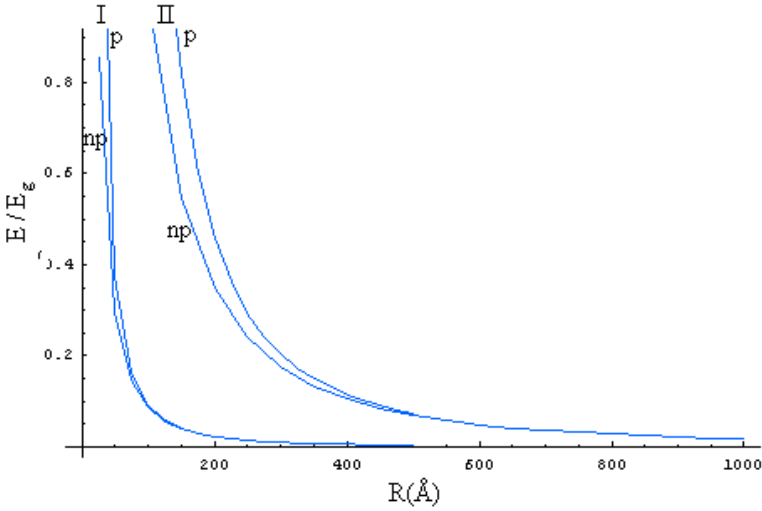
$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \chi^2 \right) R_{1,2}(\rho) = 0 \quad (11.12)$$

olarak yazabiliriz. Burada,

$$\chi^2 = \frac{3}{P^2} \frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{(3E + 3E_g + 2\Delta)} - k_z^2 \quad (11.13)$$

işareti kabul edilmiştir. (11.12) diferansiyel denklemi bir Bessel denklemdir (Sirenko vd. 1998), anti-telin uygun çözümü

$$R_{1,2}(\rho) = CY_m(\chi\rho). \quad (11.14)$$



Şekil 11.1. InSb tipi kuantum anti-tellerinde elektronların enerjisinin, anti-telin yarıçapına bağlılığı

Burada, $Y_m(\chi\rho)$ ikinci tür Bessel fonksiyonudur. Anti-telin sınırında potansiyel sonsuz olduğundan, dalga fonksiyonu $R_{1,2}(R)=0$ sınır koşulunu sağlamalıdır. Yük taşıyıcılarının özdeğerlerini bulmak için $R(\rho)$ (11.15) denklemini elde ederiz:

$$Y_m(\chi R) = 0. \quad (11.15)$$

(11.13) ve (11.15) denklemleri, özdeğerler için

$$\frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{3E + 3E_g + 2\Delta} = \left(\frac{z_{mp}^2}{R^2} + k_z^2 \right) \frac{P^2}{3} \quad (11.16)$$

denklemini verir. Burada, $z_{mp} - Y(z)$ Bessel fonksiyonunun p 'inci köküdür. (11.16) denklemi, kuantum anti-tellerinde elektronların, hafif ve spin-orbital etkileşimleri nedeniyle ayrılmış boşlukların spektrumlarını ifade eden bir denklemdir. Bu denklem, kuantum anti-tellerindeki yük taşıyıcılarının enerji spektrumlarının parabolik olmamasını analiz etmek için kullanılabilir.

Şekil 11.1'te, InSb kuantum anti-telindeki elektronların enerjisinin E , telin yarıçapına R bağılılığı iki durumda gösterilmiştir: parabolik dispersiyon, kane dispersiyonuna tabi olan durum. Bessel fonksiyonunun birinci ve ikinci köklerinden elde edilen enerjiler sunulmuştur. Bu şekle göre, kuantum anti-telinin yarıçapı arttıkça her iki durumda da elektronların enerjileri üst üste biner. Kuantum anti-telinin yarıçapı küçüldükçe, elektronların enerjisi birbirinden belirgin bir şekilde ayrışır. Hesaplamalar için kullanılan InSb bölge parametreleri şunlardır:

$$E_g = 0.2368eV, \quad \Delta = 0.810eV, \quad E_p = 23.42eV, \quad E_p = \frac{2m_0}{\hbar^2} P^2, \quad m_0$$

serbest elektronun etkin kütesidir (Efros ve Rosen 1998).

12.HARİCİ HOMOJEN MANYETİK ALAN VARLIĞINDA KANE TİPİ YARI İLETKEN KUANTUM ANTİ-TELLERİNDE YÜK TAŞIYICILARININ ENERJİ SPEKTRUMLARI

Kuantum telinin ekseni boyunca yönelen harici homojen manyetik alan, Kane denklemlerine aşağıdaki şekilde seçilmiş vektör potansiyeli aracılığıyla dahil edilir.

$$\vec{A} = \left(-\frac{Hy}{2}, \frac{Hx}{2}, 0 \right) \quad (12.1)$$

ve k_{\pm} 'yi yerine koyarsak

$$k_{\pm} \rightarrow k_{\pm} \pm i \frac{1}{2} \lambda_H r_{\pm} \quad (12.2)$$

burada,

$$r_{\pm} = x \pm iy, \quad \lambda_H = \frac{eH}{\hbar c}. \quad (12.3)$$

(11.3)-(11.8) denklemlerinden $C_3 - C_8$ 'i bulup (11.1) ve (11.2) denklemlerinde yerine koyarsak ve (12.2), (12.3) bağıntılarını kullanırsak, $C_{1,2}$ için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\left(\begin{array}{l} -E + \frac{P^2}{3} \left(\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right) (-\nabla^2 + \lambda_H L_z + \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2) \pm \\ \frac{P^2 \lambda_H}{3} \left(\frac{1}{E + E_g} - \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right) \end{array} \right) C_{1,2} = 0. \quad (12.4)$$

Burada, L_z hareket miktarının z bileşenidir ve $\rho^2 = x^2 + y^2$. (7.4) denklemini

$$\left(\begin{array}{c} -\nabla^2 + \frac{1}{4}\lambda_H^2\rho^2 \pm \\ \lambda_H \frac{\Delta}{3E+3E_g+2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E(E+E_g)(E+E_g+\Delta)}{3E+3E_g+2\Delta} \end{array} \right) C_{1,2} = 0 \quad (12.5)$$

(12.5) denklemi şeklinde yazabiliriz. Silindirik koordinat sisteminde (12.5) denkleminin çözümünü

$$C_{1,2} = A_{ml} \exp(im\phi + ik_z z) F_{1,2}(\rho) \quad (12.6)$$

şekilde arayalım. Silindirik koordinat sisteminde ∇^2 ve L_z operatörlerinin (12.7), (12.8) denklemlerinde yazılan ifadelerini dikkate alırsak:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (12.7)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (12.8)$$

(12.5) denklemini

$$\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \lambda_H m + \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{1}{4}\lambda_H^2\rho^2 + k_z^2 \pm \\ \lambda_H \frac{\Delta}{3E+3E_g+2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E(E+E_g)(E+E_g+\Delta)}{3E+3E_g+2\Delta} \end{array} \right) F_{1,2} = 0 \quad (12.9)$$

olarak yazabiliriz. (12.5) denkleminde

$$k_z^2 \pm \lambda_H \frac{\Delta}{3E + 3E_g + 2\Delta} - \frac{3}{P^2} \frac{E(E + E_g)(E + E_g + \Delta)}{3E + 3E_g + 2\Delta} = -\frac{2m}{\hbar^2} B(E) \quad (12.10)$$

işaretlemesi kabul edilmiştir. (12.10) denklemini (12.9) denkleminde yerine koyarsak, aynı denklemi

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} B(E) - \lambda_H m - \frac{m^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \lambda_H^2 \rho^2 \right] \right) F_{1,2} = 0 \quad (12.11)$$

olarak yazarız. $k_t^2 = \frac{2m}{\hbar^2} B(E)$ işaretini kabul edip yeni ξ

değişkenine geçelim:

$$\xi = \frac{\rho^2}{2l_H^2}, \quad (12.12)$$

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi}, \quad (12.13)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\rho}{l_H^2} \frac{d}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\rho^2}{l_H^4} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{l_H^2} \frac{d}{d\xi}. \quad (12.14)$$

(12.12) - (12.14) formüllerini kullanarak (12.11) denklemini (12.15) denklemini şeklinde yazabiliriz.

$$\frac{d^2 F_{1,2}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dF_{1,2}}{d\xi} + \left[\frac{k_t^2 l_H^2}{2\xi} - \frac{m^2}{4\xi^2} + \frac{m}{2\xi} - \frac{1}{4} \right] F_{1,2} = 0. \quad (12.15)$$

Bu denklemin çözümü

$$F_{1,2} = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \xi^{\frac{|m|}{2}} \Phi_{1,2}(\xi) \quad (12.16)$$

şeklinde arayalım (Багров, Гитман, ve Скаржинский 1986; Самсонов ve Печерицын 2000). Radyal fonksiyon $\Phi(\xi)$ için (12.17) denklemini elde ederiz:

$$\xi \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + (|m| + 1 - \xi) \frac{d\Phi}{d\xi} - \alpha_{1,2} \Phi = 0. \quad (12.17)$$

(12.17) denkleminin çözümü, dejenere hipergeometrik Kummer fonksiyonudur (Abramowitz ve Stegun 1965). Kuantum anti-teli için (12.17) denkleminin çözümü:

$$\Phi(\xi) = U(\alpha_{1,2}, b, \xi). \quad (12.18)$$

Burada,

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2} k_z^2 l_H^2 - \frac{3E_1 (E_1 + E_g)(E_1 + E_g + \Delta)}{\hbar \omega_0 (3E_1 + 3E_g + 2\Delta) E_p} \pm \frac{\Delta}{2(3E_1 + 3E_g + 2\Delta)}. \quad (12.19)$$

$$\omega_0 = \frac{eH}{m_0 c} \text{ serbest elektron için siklotron frekansıdır, } l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}$$

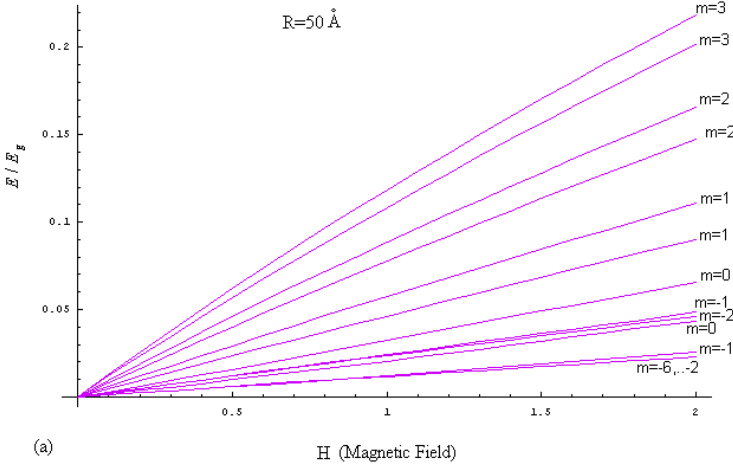
$$\text{manyetik uzunluktur ve } E_p = \frac{2m_0}{\hbar^2} P^2$$

$$b = |m| + 1. \quad (12.20)$$

Kummer fonksiyonunun parametresidir. $\rho = R$ olan durumda, dalga fonksiyonu sınır koşuluna göre $C_{1,2} = 0$. Bu koşul, öz fonksiyon için

$$U\left(\alpha_{1,2}, b, \frac{R^2}{2l_H^2}\right) = 0 \quad (12.21)$$

denklemini verir. (12.21) denklemini kullanarak, R ve m 'nin bilinen değerleri için $\alpha_{1,2}(R, m)$ 'i buluruz. Bulunan $\alpha_{1,2}(R, m)$ değerlerini (12.25) denkleminde yerine koyarak $E(R, m)$ enerji değerlerini buluruz. Kuantum anti-tellerindeki yük taşıyıcılarının $E_{nm\sigma}$ enerji spektrumları; m azimut kuantum sayısı, n radyal kuantum sayısı ve σ spin kuantum sayısı ile karakterize edilir. Şekil 12.1 ve Şekil 12.2'te, InSb tipi yarı iletkenin kuantum anti-tellerinde elektronların düşük enerji seviyelerinin manyetik alana bağımlılığı, $R = 5nm$ ve $R = 30nm$ için, $n = 0$, $k_z = 0$ ve farklı m değerleri için gösterilmiştir.

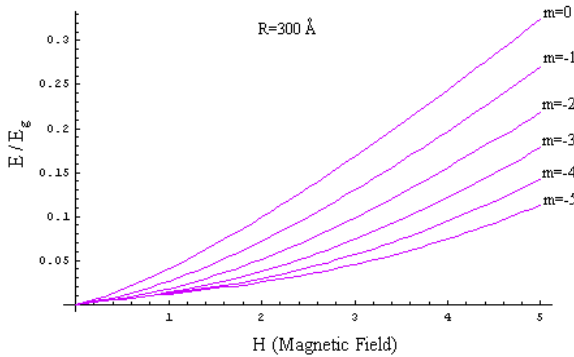


Şekil 12.1. $R=5nm$, $n=0$ ve $k_z=0$ olduğu durumda InSb tipi kuantum anti-tellerinde elektronların düşük enerji seviyelerinin manyetik alana bağımlılığı

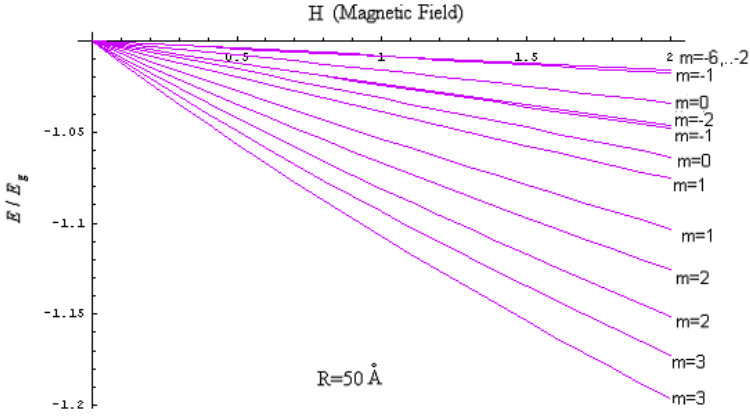
Şekil 12.1'te, m kuantum sayısının aldığı değerler $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, -4, -5, -6$. Şekilden görüldüğü gibi, enerji manyetik alana doğrusal olarak bağlıdır ve $m \leq -2$ durumları dejenere olmuştur.

Şekil 12.2'te, yarıçapı $R = 30nm$ olan anti-tellerde elektronların enerjisinin manyetik alana bağlılığı gösterilmiştir ve bu bağımlılığın parabolik olduğu görülmektedir. Şekilde, $\sigma = -1/2$ 'e eşit olan spin kuantum sayısı durumu gösterilmiştir. Spin kuantum sayısının $1/2$ olduğu durumda da bağımlılık aynıdır. Elde edilen sonuçlar Masale'nin (Masale 2000) sonuçlarıyla uyumludur.

Şekil 12.3'da, InSb tipi anti-tellerde hafif boşlukların enerjisinin manyetik alana bağlılığı $R = 5nm$, $n = 0$ ve $k_z = 0$ olduğu durumda gösterilmiştir. m kuantum sayısının aldığı değerler $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, -4, -5, -6$. Şekilden görüldüğü gibi, M3 değerlerinde hafif boşlukların enerjileri dejenere olmuştur.



Şekil 12.2. $R=30nm$, $n=0$ ve $k_z=0$ olduğu durumda InSb tipi yarı iletkenlerin kuantum anti-tellerinde elektronların düşük enerji seviyelerinin manyetik alana bağlılığı



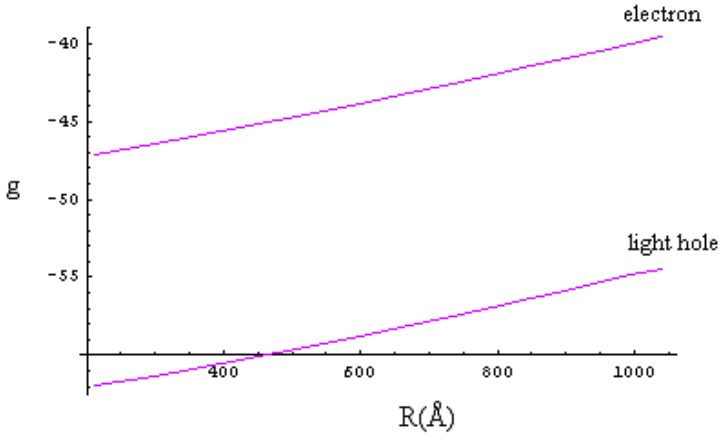
Şekil 12.3. $R=30\text{nm}$, $n=0$ ve $k_z=0$ olduğu durumda InSb tipi yarı iletkenlerin kuantum anti-tellerinde hafif boşlukların enerji seviyelerinin manyetik alana bağlılığı

Elektronların etkin g -faktörünü Zeeman ayrışmasından yararlanarak bulabiliriz:

$$g(E) = \frac{E_{\uparrow} - E_{\downarrow}}{\mu_B H}. \quad (12.22)$$

Burada, E_{\uparrow} ve E_{\downarrow} , elektronların enerjisinin sırasıyla spin yukarı ve aşağı durumdaki değerleridir. Şekil 12.4'de, InSb yarı iletkenlerinin kuantum kuyularındaki, manyetik alanın 1 T olduğu durumda elektronların ve hafif deliklerin etkin g -faktörlerinin R yarıçapına bağlılığı gösterilmiştir.

Şekilden de görüldüğü gibi, InSb kuantum kuyularında elektronların ve hafif deliklerin g -faktörü, kuantum kuyusunun yarıçapı küçüldükçe, g -faktörünün değeri hacim durumundaki değere yaklaşır.



Şekil 12.4. InSb tipi kuantum anti-tellerinde elektronların ve hafif boşlukların etkin g -faktörlerinin R yarıçapına bağlılığı

KAYNKALAR

- Abramowitz, Milton, ve Irene A. Stegun. 1965. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. C. 55. Courier Corporation.
- Alivisatos, A. P. 1996. "Semiconductor Clusters, Nanocrystals, and Quantum Dots". *Science* 271(5251):933-37. doi:10.1126/science.271.5251.933.
- Babayev, A. M., E. Artunc, S. Cakmak, ve S. Cakmaktepe. 2005. "Energy spectrum of carriers in a Kane-type cylindrical cavity". *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 28(1):37-42.
- Babayev, A. M., ve S. Cakmaktepe. 2006. "The singular Kane oscillator". *Chinese Physics Letters* 23(1):10.
- Balkanski, Minko, ve Richard Fisher Wallis. 2000. *Semiconductor physics and applications*. C. 8. Oxford University Press.
- Banin, Uri, YunWei Cao, David Katz, ve Oded Millo. 1999. "Identification of atomic-like electronic states in indium arsenide nanocrystal quantum dots". *Nature* 400(6744):542-44.
- Bimberg, Dieter, Marius Grundmann, ve Nikolai N. Ledentsov. 1999. *Quantum dot heterostructures*. John Wiley & Sons.
- Bowers, R., ve Y. Yafet. 1959. "Magnetic Susceptibility of InSb". *Physical Review* 115(5):1165-72. doi:10.1103/PhysRev.115.1165.
- Brus, L. 1991. "Quantum Crystallites and Nonlinear Optics". *Applied Physics A Solids and Surfaces* 53(6):465-74. doi:10.1007/BF00331535.
- Chuu, Der-San, ve Chi-Suan Wang. 1994. "Electronic energy spectrum in a barrier-like multilayer quantum wire with a magnetic field parallel to the wire axis". *Physica B: Condensed Matter* 202(1-2):118-26.
- Constantinou, N. C., M. Masale, ve D. R. Tilley. 1992. "The Zeeman splitting of quasi-one dimensional electron subbands". *Journal of Physics: Condensed Matter* 4(18):4499.
- Çakmak, S., A. M. Babayev, E. Artunç, A. Kökçe, ve S. Çakmaktepe. 2003. "g-Factor of carriers in Kane-type semiconductor wire". *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 18(4):365-71.
- Davies, John H. 1998. *The physics of low-dimensional semiconductors: an introduction*. Cambridge university press.
- Efros, Al. L., ve M. Rosen. 1998. "Quantum Size Level Structure of Narrow-Gap Semiconductor Nanocrystals: Effect of Band Coupling". *Physical Review B* 58(11):7120-35. doi:10.1103/PhysRevB.58.7120.
- Ekimov, A. I. 1991. "Optical properties of semiconductor quantum dots in glass matrix". *Physica Scripta* 1991(T39):217.
- Gashimzade, F. M., A. M. Babaev, ve M. A. Bagirov. 2000. "Energy spectra of narrow-and zero-gap-semiconductor quantumdots". *Journal of Physics: Condensed Matter* 12(36):7923.
- Gashimzade, F. M., A. M. Babayev, S. Çakmak, ve Ş. Çakmaktepe. 2004. "Energy spectrum of carriers in Kane-type hollow cylinder". *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 23(1-2):177-82.
- Guyot-Sionnest, Philippe, ve Margaret A. Hines. 1998. "Intraband transitions in semiconductor nanocrystals". *Applied Physics Letters* 72(6):686.

- Hannak, R. M., M. Oestreich, A. P. Heberle, W. W. Ru, ve K. Ko. 1995. "Electron g factor in quantum wells determined by spin quantum beats". *Solid state communications* 93(4):313-17.
- Horan, Paul, ve Werner Blau. 1990. "Photodarkening effect and the optical nonlinearity in a quantum-confined, semiconductor-doped glass". *Journal of the Optical Society of America B* 7(3):304-8.
- Ivchenko, E. L., A. A. Kiselev, ve M. Willander. 1997. "Electronic g factor in biased quantum wells". *Solid state communications* 102(5):375-78.
- Ivchenko, Eougenious L. 2005. *Optical spectroscopy of semiconductor nanostructures*. Alpha Science Int'l Ltd.
- Kane, Evan O. 1957. "Band structure of indium antimonide". *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 1(4):249-61.
- Kiselev, A. A., E. L. Ivchenko, ve Ulrich Rössler. 1998. "Electron g factor in one- and zero-dimensional semiconductor nanostructures". *Physical Review B* 58(24):16353.
- Kowalski, B., P. Omling, B. K. Meyer, D. M. Hofmann, C. Wetzel, V. Härle, F. Scholz, ve P. Sobkowicz. 1994. "Conduction-Band Spin Splitting of Type-I Ga_xIn_{1-x}As/InP Quantum Wells". *Physical Review B* 49(20):14786-89. doi:10.1103/PhysRevB.49.14786.
- Masale, M. 2000. "Oscillator strengths for optical transitions in a hollow cylinder". *Physica B: Condensed Matter* 292(3-4):241-49.
- Masale, M., N. C. Constantinou, ve D. R. Tilley. 1992. "Single-Electron Energy Subbands of a Hollow Cylinder in an Axial Magnetic Field". *Physical Review B* 46(23):15432-37. doi:10.1103/PhysRevB.46.15432.
- Murray, C. B., D. J. Norris, ve M. G. Bawendi. 1993. "Synthesis and Characterization of Nearly Monodisperse CdE (E = Sulfur, Selenium, Tellurium) Semiconductor Nanocrystallites". *Journal of the American Chemical Society* 115(19):8706-15. doi:10.1021/ja00072a025.
- Norris, D. J., Al. L. Efros, M. Rosen, ve M. G. Bawendi. 1996. "Size Dependence of Exciton Fine Structure in CdSe Quantum Dots". *Physical Review B* 53(24):16347-54. doi:10.1103/PhysRevB.53.16347.
- Norris, D. J., A. Sacra, C. B. Murray, ve M. G. Bawendi. 1994. "Measurement of the Size Dependent Hole Spectrum in CdSe Quantum Dots". *Physical Review Letters* 72(16):2612-15. doi:10.1103/PhysRevLett.72.2612.
- Perry, C. H., J. M. Worlock, M. C. Smith, ve A. Petrou. 1987. "High Magnetic Fields in Semiconductor Physics". *Springer Series in Solid-State Sciences* vol 71.
- Pryor, Craig. 1998. "Eight-Band Calculations of Strained InAs/GaAs Quantum Dots Compared with One-, Four-, and Six-Band Approximations". *Physical Review B* 57(12):7190-95. doi:10.1103/PhysRevB.57.7190.
- Rodina, A. V., Al. L. Efros, ve A. Yu. Alekseev. 2003. "Effect of the Surface on the Electron Quantum Size Levels and Electron g Factor in Spherical Semiconductor Nanocrystals". *Physical Review B* 67(15):155312. doi:10.1103/PhysRevB.67.155312.
- Rodrigues, P. A. M., G. Tamulaitis, Y. Yu Peter, ve Subhash H. Risbud. 1995. "Size selective photoluminescence excitation spectroscopy in CdSe nanocrystals". *Solid state communications* 94(8):583-87.
- Roth, Laura M., Benjamin Lax, ve Solomon Zwerdling. 1959. "Theory of Optical Magneto-Absorption Effects in Semiconductors". *Physical Review* 114(1):90-104. doi:10.1103/PhysRev.114.90.

- Rustamov, K. A., ve A. M. Babaev. 1985. "On the group-theoretical approach to the energy spectra problem of charge carriers in cubic solids". *Unknown*. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985otaq.rept....R/abstract>.
- Schmitt-Rink, S., D. A. B. Miller, ve D. S. Chemla. 1987. "Theory of the Linear and Nonlinear Optical Properties of Semiconductor Microcrystallites". *Physical Review B* 35(15):8113-25. doi:10.1103/PhysRevB.35.8113.
- Sercel, Peter C., Al. L. Efros, ve M. Rosen. 1999. "Intrinsic Gap States in Semiconductor Nanocrystals". *Physical Review Letters* 83(12):2394-97. doi:10.1103/PhysRevLett.83.2394.
- Sercel, Peter C., ve Kerry J. Vahala. 1990. "Analytical Formalism for Determining Quantum-Wire and Quantum-Dot Band Structure in the Multiband Envelope-Function Approximation". *Physical Review B* 42(6):3690-3710. doi:10.1103/PhysRevB.42.3690.
- Shim, Moonsub, ve Philippe Guyot-Sionnest. 2000. "N-type colloidal semiconductor nanocrystals". *Nature* 407(6807):981-83.
- Sirenko, A. A., V. I. Belitsky, T. Ruf, M. Cardona, A. I. Ekimov, ve C. Trallero-Giner. 1998. "Spin-Flip and Acoustic-Phonon Raman Scattering in CdS Nanocrystals". *Physical Review B* 58(4):2077-87. doi:10.1103/PhysRevB.58.2077.
- Sirenko, A. A., T. Ruf, M. Cardona, D. R. Yakovlev, W. Ossau, A. Waag, ve G. Landwehr. 1997. "Electron and Hole g Factors Measured by Spin-Flip Raman Scattering in CdTe/Cd_{1-x}Mg_xTe Single Quantum Wells". *Physical Review B* 56(4):2114-19. doi:10.1103/PhysRevB.56.2114.
- Vahala, Kerry J., ve Peter C. Sercel. 1990. "Application of a Total-Angular-Momentum Basis to Quantum-Dot Band Structure". *Physical Review Letters* 65(2):239-42. doi:10.1103/PhysRevLett.65.239.
- Xia, Jian-Bai. 1989. "Electronic Structures of Zero-Dimensional Quantum Wells". *Physical Review B* 40(12):8500-8507. doi:10.1103/PhysRevB.40.8500.
- Zawadzki, W., S. Klahn, ve U. Merkt. 1986. "Inversion Electrons on Narrow-Band-Gap Semiconductors in Crossed Electric and Magnetic Fields". *Physical Review B* 33(10):6916-28. doi:10.1103/PhysRevB.33.6916.
- Zawadzki, W., ve M. Kubisa. 1993. "Magneto-optical properties of quantum dots in InSb". *Semiconductor Science and Technology* 8(1S):S240.
- Алферов, Ж. И. 2006. "История и будущее полупроводниковых гетероструктур". *Лекции лауреатов Демидовской премии (1993-2004).— Екатеринбург, 2006*. <https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/25894/1/demprize-2006-23.pdf>.
- Ансельм, Андрей Иванович. 1978. "Введение в теорию полупроводников". <https://libarch.nmu.org.ua/handle/GenofondUA/43759>.
- Аскеров, Б. М. 1985. *Электронные явления переноса в полупроводниках*. С. 320. М.: Наука.
- Бабаев, А. М. 1991. "Энергетический спектр электронов и дырок в алмазо-подобных кристаллах в обобщенной изотропной модели Кейна". Баку.
- Багров, В. Г., Д. М. Гитман, ve В. Д. Скаржинский. 1986. "Эффект Аронов-Бома для стационарных и когерентных состояний электрона в однородном магнитном поле". *Труды Физического Института им. Лебедева* 176:151-65.

- Воробьев, Л. Е., Е. Л. Ивченко, Д. А. Фирсов, ve В. А. Шалыгин. 2001. *Оптические свойства наноструктур*. Новые разделы физики полупроводников. СПб: Наука.
- Гельфанд, Израиль Моисеевич, Роберт Адольфович Минлос, ve Зоря Яковлевна Шапиро. 1958. *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*. Физматгиз.
- Григорян, Г. Б., Эдуард Мушегович Казарян, Александр Львович Эфрос, ve Т. В. Язева. 1990. “Квантование дырки и край поглощения в сферических микрокристаллах полупроводников со сложной структурой валентной зоны”. *Физика твердого тела* 32(6):1772-79.
- Дьяконов, М. И., ve В. И. Перель. 1971. “О спиновой ориентации электронов при межзонном поглощении света в полупроводниках”.
- Екимов, А. И., А. А. Онущенко, А. Г. Плюхин, ve Ал Л. Эфрос. 1985. “Размерное квантование экситонов и определение параметров их энергетического спектра в SiCl”. *ЖЭТФ* 88(4):1490-1501.
- Ивченко, Еугениус Левович, ve А. А. Киселев. 1992. “Электронный g-фактор в квантовых ямах и сверхрешетках”. *Физика и техника полупроводников* 26(8):1471-79.
- Леденцов, Н. Н., В. М. Устинов, В. А. Шукин, П. С. Копьев, Ж. И. Алферов, ve Д. Бимберг. 1998. “Гетероструктуры с квантовыми точками: получение, свойства, лазеры”. *Физика и техника полупроводников* 32(4):385-410.
- Любарский, Григорий Яковлевич. 1957. *Теория групп и ее применение в физике*. С. 1. Гостехиздат.
- Рустамов, К. А., ve А. М. Бабаев. 1998. “Законы дисперсии носителей заряда в алмаз-подобных кристаллах”. *Известия вузов Физика* 1(12):16207.
- Самсонов, Б. Ф., ve А. А. Печерицын. 2000. “Преобразование Дарбу для одномерного стационарного уравнения Дирака с псевдоскалярным потенциалом”. *Изв. Вузов Физика* 43(11):48-54.